Bac Général Maths + SES (Mathématiques et Sciences économiques et sociales)

# SUJET D'EXAMEN (SESSION OFFICIELLE)

Mathématiques - Session 2025

Sujet de l'examen national tel que publié pour la session indiquée. Source : sujets nationaux publiés par le ministère chargé de l'examen et les services académiques. Document mis à disposition par FormaV pour la révision.

Toutes les annales et leurs corrigés : https://bac-maths-ses.fr/annales-sujets-et-corriges

# Baccalauréat Amérique du Nord 22 mai 2025

## Sujet 2 (secours)

## ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

A. P. M. E. P.

**EXERCICE 1** **5 points**

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-x} + 2x - 1.$$

On admet que la fonction $f$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
On appelle $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.
On note $f'$ la fonction dérivée de la fonction $f$ et $f''$ la fonction dérivée seconde de $f$, c'est-à-dire la fonction dérivée de la fonction $f'$.

**Partie A : Étude de la fonction $f$**

1. Déterminer les limites de la fonction $f$ en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Pour tout réel $x$, calculer $f'(x)$.
3. Montrer que pour tout réel $x$ :

$$f''(x) = (x-2)\mathrm{e}^{-x}$$

4. Étudier la convexité de la fonction $f$.
5. Étudier les variations de la fonction $f'$ sur $\mathbb{R}$, puis dresser son tableau de variations en y faisant apparaître la valeur exacte de l'extremum.

   Les limites de la fonction $f'$ aux bornes de l'intervalle de définition ne sont pas attendues.
6. En déduire le signe de la fonction $f'$ sur $\mathbb{R}$, puis justifier que la fonction $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
7. Justifier qu'il existe un unique réel $\alpha$ tel que $f(\alpha) = 0$.

   Donner un encadrement de $\alpha$, au centième près.
8. On considère la droite $\Delta$ d'équation $y = 2x - 1$.

   Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à la droite $\Delta$.

**Partie B : Calcul d'aire**

Soit $n$ un entier naturel non nul. On considère l'aire du domaine $D_n$ délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, la droite $\Delta$ et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = n$. On note

$$I_n = \int_1^n x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$$

1. À l'aide d'une intégration par parties, exprimer $I_n$ en fonction de $n$.
2. **a.** Justifier que l'aire du domaine $D_n$ est $I_n$.
   **b.** Calculer la limite de l'aire du domaine $D_n$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

**EXERCICE 2** **5 points**

Pour chacune des affirmations suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse puis justifier la réponse donnée. Toute réponse non argumentée ne sera pas prise en compte.

$\left(O\ ;\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath}\ ,\ \vec{k}\right)$ est un repère de l'espace.

On considère la droite D qui a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x &= 3-t \\ y &= -2+3t \\ z &= 1+4t \end{cases}$ , $t \in \mathbb{R}$ et le plan $P$ qui a pour équation cartésienne : $2x-3y+z-6=0$.

1. **Affirmation :** La droite D′, qui a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x=2+2t \\ y=4-6t \\ z=9-8t \end{cases}$ , $t \in \mathbb{R}$, est parallèle à la droite D.

2. On admet que les points A(−2 ; 3 ; 1), B(1 ; 3 ; −4) et C(6 ; 3 ; 9) ne sont pas alignés.

   **Affirmation :** La droite D est orthogonale au plan défini par les trois points A, B et C.

3. **Affirmation :** La droite D est sécante avec la droite Δ qui a pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x &= -4+2t' \\ y &= 1-3t' \\ z &= 2+t' \end{cases}$ $t' \in \mathbb{R}$

4. **Affirmation :** Le point F(−3 ; −3 ; 3) est le projeté orthogonal du point E(−5 ; 0 ; 2) sur le plan $P$.

5. **Affirmation :** Il existe exactement une valeur du paramètre réel $a$ telle que le plan $P'$ d'équation $-3x+y-a^2z+3=0$ soit parallèle à la droite D.

**Note du rédacteur** « pour certaines questions, il est indispensable que le repère soit orthonormé. »

**EXERCICE 3** **5 points**

Dans cet exercice, les réponses seront arrondies à $10^{-4}$ près.

Durant la saison hivernale, la circulation d'un virus a entraîné la contamination de 2 % de la population d'un pays. Dans ce pays, 90 % de la population a été vaccinée contre ce virus.
On constate que 62 % des personnes contaminées avaient été vaccinées.

On interroge au hasard une personne, et on note les évènements suivants :

$C$ : « la personne a été contaminée »

$V$ : « la personne a été vaccinée ».

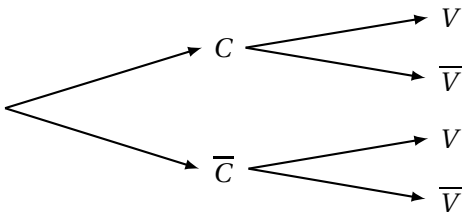
Les évènements contraires des évènements $C$ et $V$ sont notés respectivement $\overline{C}$ et $\overline{V}$.

1. À partir de l'énoncé, donner, sans calcul, les probabilités $P(C)$, $P(V)$ et la probabilité conditionnelle $P_C(V)$.

2. **a.** Calculer $P(C \cap V)$.

**b.** En déduire $P\left(\overline{C} \cap V\right)$.

**3.** Recopier l'arbre des probabilités ci-dessous et le compléter.




**4.** Calculer $P_V(C)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

**5.** Déterminer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses en justifiant votre réponse.

**a.** « Parmi les personnes non contaminées, il y a dix fois plus de personnes vaccinées que de personnes non vaccinées. »

**b.** « Plus de 98 % de la population vaccinée n'a pas été contaminée. »

**6.** On s'intéresse à un échantillon de 20 personnes choisies au hasard dans la population.

La population du pays est assez importante pour qu'on puisse assimiler ce choix à des tirages successifs avec remise.

On note $X$ la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de personnes contaminées.

*On rappelle que, pour une personne choisie au hasard, la probabilité d'être contaminée est* $p = 0,02$.

**a.** Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire $X$ ? Justifier et donner ses paramètres.

**b.** Calculer, en rappelant la formule, la probabilité que 4 personnes exactement soient contaminées dans ce groupe de 20 personnes.

## EXERCICE 4 — 5 points

L'objectif de cet exercice est d'étudier la suite $(u_n)$ définie pour tout entier naturel $n$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+2} = u_{n+1} - \dfrac{1}{4}u_n \end{cases}$$

### Partie A : Conjecture

**1.** Recopier et compléter le tableau ci-dessous. Aucune justification n'est demandée.

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $u_n$ | 0 | $\dfrac{1}{2}$ | $\dfrac{1}{2}$ | | | |

**2.** Conjecturer la limite de la suite $(u_n)$.

**Partie B : Étude d'une suite auxiliaire**

Soit $(w_n)$ la suite définie pour tout entier naturel $n$ par :

$$w_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$$

**1.** Calculer $w_0$.

**2.** Démontrer que la suite $(w_n)$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

**3.** Pour tout entier naturel $n$, exprimer $w_n$ en fonction de $n$.

**4.** Montrer que pour tout entier naturel $n$, on a :

$$u_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2}u_n$$

**5.** Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n = n\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

**Partie C : Étude de la suite $(u_n)$**

**1.** Montrer que la suite $(u_n)$ est décroissante à partir du rang $n = 1$.

**2.** En déduire que la suite $(u_n)$ est convergente sans chercher à calculer la valeur de la limite.

**3.** On admet que la limite de la suite $(u_n)$ est solution de l'équation : $\ell = \ell - \frac{1}{4}\ell$.

Déterminer la limite de la suite $(u_n)$.