Bac Général Maths + SES (Mathématiques et Sciences économiques et sociales)

# SUJET D'EXAMEN (SESSION OFFICIELLE)

Mathématiques - Session 2025

Sujet de l'examen national tel que publié pour la session indiquée. Source : sujets nationaux publiés par le ministère chargé de l'examen et les services académiques. Document mis à disposition par FormaV pour la révision.

Toutes les annales et leurs corrigés : https://bac-maths-ses.fr/annales-sujets-et-corriges

# BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

**SESSION 2025**

# MATHÉMATIQUES

## Jour 1

Durée de l'épreuve : **4 heures**

*L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.*
*L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé.*

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1/7 à 7/7.

*La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.*

**Exercice 1 (6 points)**

Pour accéder au réseau privé d'une entreprise depuis l'extérieur, les connexions des employés transitent aléatoirement via trois serveurs distants différents, notés A, B et C. Ces serveurs ont des caractéristiques techniques différentes et les connexions se répartissent de la manière suivante :

- 25 % des connexions transitent via le serveur A ;
- 15 % des connexions transitent via le serveur B ;
- le reste des connexions s'effectue via le serveur C.

Les connexions à distance sont parfois instables et, lors du fonctionnement normal des serveurs, les utilisateurs peuvent subir des déconnexions pour différentes raisons (saturation des serveurs, débit internet insuffisant, attaques malveillantes, mises à jour de logiciels, etc.).

On dira qu'une connexion est stable si l'utilisateur ne subit pas de déconnexion après son identification aux serveurs. L'équipe de maintenance informatique a observé statistiquement que, dans le cadre d'un fonctionnement habituel des serveurs :

- 90 % des connexions via le serveur A sont stables ;
- 80 % des connexions via le serveur B sont stables ;
- 85 % des connexions via le serveur C sont stables.

*Les parties A et B sont indépendantes l'une de l'autre et peuvent être traitées séparément.*

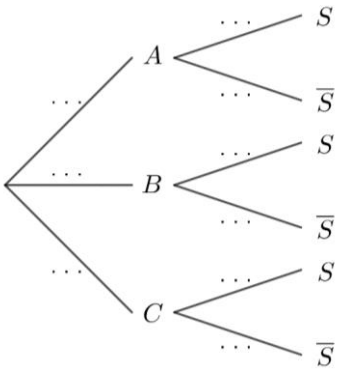
**Partie A**

On s'intéresse au hasard à l'état d'une connexion effectuée par un employé de l'entreprise. On considère les événements suivants :

- $A$ : « La connexion s'est effectuée via le serveur A » ;
- $B$ : « La connexion s'est effectuée via le serveur B » ;
- $C$ : « La connexion s'est effectuée via le serveur C » ;
- $S$ : « La connexion est stable ».

On note $\overline{S}$ l'événement contraire de l'événement $S$.

**1.** Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous modélisant la situation de l'énoncé.



**2.** Démontrer que la probabilité que la connexion soit stable et passe par le serveur B est égale à $0{,}12$.

**3.** Calculer la probabilité $P(C \cap \bar{S})$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

**4.** Démontrer que la probabilité de l'événement $S$ est $P(S) = 0{,}855$.

**5.** On suppose désormais que la connexion est stable. Calculer la probabilité que la connexion ait eu lieu depuis le serveur B. *On donnera la valeur arrondie au millième*.

## Partie B

D'après la **partie A**, la probabilité qu'une connexion soit **instable** est égale à $0{,}145$.

**1.** Dans le but de détecter les dysfonctionnements de serveurs, on étudie un échantillon de $50$ connexions au réseau, ces connexions étant choisies au hasard. On suppose que le nombre de connexions est suffisamment important pour que ce choix puisse être assimilé à un tirage avec remise.

On désigne par $X$ la variable aléatoire égale au nombre de connexions instables au réseau de l'entreprise, dans cet échantillon de $50$ connexions.

**a.** On admet que la variable aléatoire $X$ suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.

**b.** Donner la probabilité qu'au plus huit connexions soient instables. *On donnera la valeur arrondie au millième.*

**2.** Dans cette question, on constitue désormais un échantillon de $n$ connexions, toujours dans les mêmes conditions, où $n$ désigne un entier naturel strictement positif. On note $X_n$ la variable aléatoire égale aux nombres de connexions instables et on admet que $X_n$ suit une loi binomiale de paramètres $n$ et $0{,}145$.

**a.** Donner l'expression en fonction de $n$ de la probabilité $p_n$ qu'au moins une connexion de cet échantillon soit instable.

**b.** Déterminer, en justifiant, la plus petite valeur de l'entier naturel $n$ telle que la probabilité $p_n$ est supérieure ou égale à $0{,}99$.

**3.** On s'intéresse à la variable aléatoire $F_n$ égale à la fréquence de connexions instables dans un échantillon de $n$ connexions, où $n$ désigne un entier naturel strictement positif.

On a donc $F_n = \frac{X_n}{n}$ , où $X_n$ est la variable aléatoire définie à la question 2.

**a.** Calculer l'espérance $E(F_n)$.

On admet que $V(F_n) = \frac{0{,}123975}{n}$.

**b.** Vérifier que : $P(|F_n - 0{,}145| \geq 0{,}1) \leq \frac{12{,}5}{n}$

**c.** Un responsable de l'entreprise étudie un échantillon de $1\,000$ connexions et constate que pour cet échantillon $F_{1000} = 0{,}3$. Il soupçonne un dysfonctionnement des serveurs. A-t-il raison ?

**Exercice 2 (5 points)**

On considère la suite numérique $(u_n)$ définie par son premier terme $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel $n$, par :

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2}$$

On admet que la suite $(u_n)$ est bien définie.

**1.** Calculer le terme $u_1$.

**2.** On définit la suite $(a_n)$ pour tout entier naturel $n$, par :

$$a_n = \frac{u_n}{u_n - 1}$$

On admet que la suite $(a_n)$ est bien définie.

**a.** Calculer $a_0$ et $a_1$.

**b.** Démontrer que, pour tout entier naturel $n$, $a_{n+1} = 3a_n - 1$.

**c.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à 1, $a_n \geq 3n - 1$.

**d.** En déduire la limite de la suite $(a_n)$.

**3.** On souhaite étudier la limite de la suite $(u_n)$.

**a.** Démontrer que pour tout entier naturel $n$, $u_n = \frac{a_n}{a_n - 1}$.

**b.** En déduire la limite de la suite $(u_n)$.

**4.** On admet que la suite $(u_n)$ est décroissante.
On considère le programme suivant écrit en langage Python :

```
1  def algo(p):
2      u=2
3      n=0
4      while u-1>p:
5          u=(2*u+1)/(u+2)
6          n=n+1
7      return (n,u)
```

**a.** Interpréter les valeurs `n` et `u` renvoyées par l'appel de la fonction `algo(p)` dans le contexte de l'exercice.

**b.** Donner, sans justifier, la valeur de `n` pour $p = 0{,}001$.

**Exercice 3 (4 points)**

*Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.*

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

On considère la droite $(d)$ dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = -1 \\ z = 2 - 6t \end{cases}, \text{ où } t \in \mathbb{R}.$$

On considère également les points suivants :

- $A(3\,;-3\,;-2)$
- $B(5\,;-4\,;-1)$
- $C$ le point de la droite $(d)$ d'abscisse $2$
- $H$ le projeté orthogonal du point $B$ sur le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x + 3z - 7 = 0$

**Affirmation 1**
La droite $(d)$ et l'axe des ordonnées sont deux droites non coplanaires.

**Affirmation 2**
Le plan passant par $A$ et orthogonal à la droite $(d)$ a pour équation cartésienne :

$$x + 3z + 3 = 0$$

**Affirmation 3**

Une mesure, exprimée en radian, de l'angle géométrique $\widehat{BAC}$ est $\frac{\pi}{6}$.

**Affirmation 4**

La distance $BH$ est égale à $\frac{\sqrt{10}}{2}$.

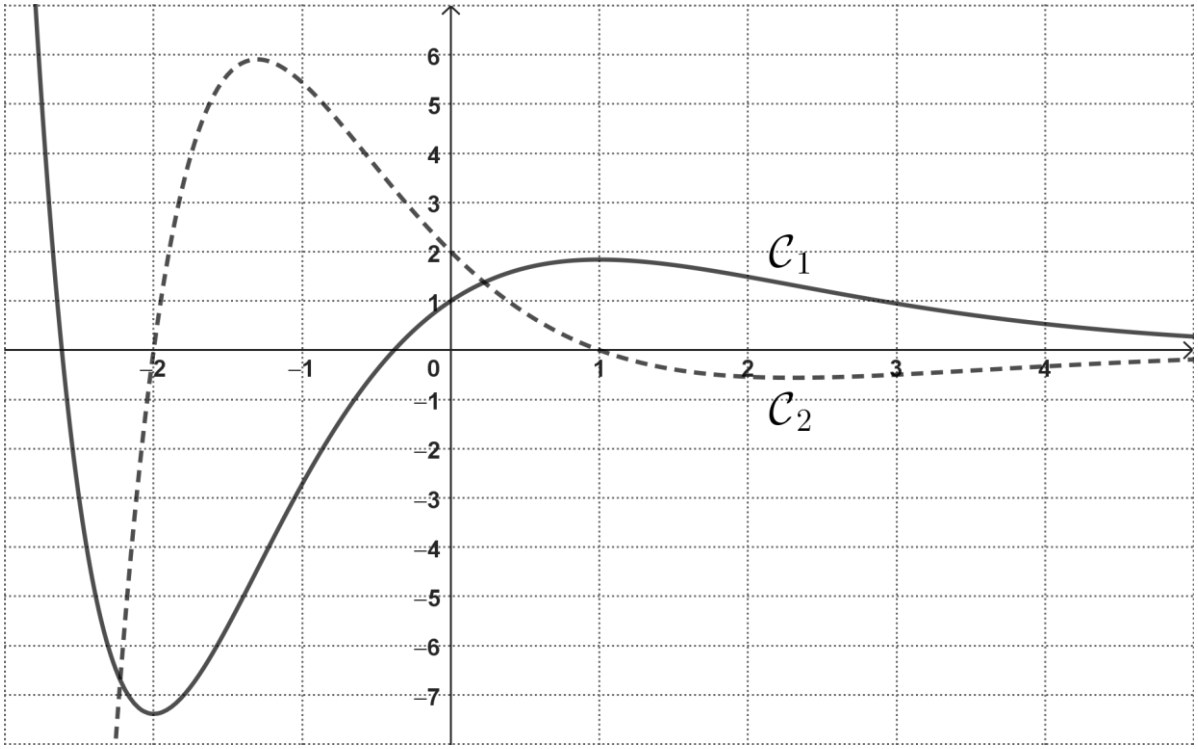
**Exercice 4 (5 points)**

*La partie C est indépendante des parties A et B.*

## Partie A

On donne ci-dessous, dans un repère orthogonal, les courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, représentations graphiques de deux fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$. L'une des deux fonctions représentées est la fonction dérivée de l'autre. On les notera $g$ et $g'$.
On précise également que :

- La courbe $\mathcal{C}_1$ coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0; 1)$.
- La courbe $\mathcal{C}_2$ coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0; 2)$ et l'axe des abscisses aux points de coordonnées $(-2; 0)$ et $(1; 0)$.




1. En justifiant, associer à chacune des fonctions $g$ et $g'$ sa représentation graphique.
2. Justifier que l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de la fonction $g$ au point d'abscisse $0$ est $y = 2x + 1$.

## Partie B

On considère $(E)$ l'équation différentielle $y + y' = (2x + 3)\mathrm{e}^{-x}$ , où $y$ est une fonction de la variable réelle $x$.

**1.** Montrer que la fonction $f_0$ définie pour tout nombre réel $x$ par $f_0(x) = (x^2 + 3x)\mathrm{e}^{-x}$ est une solution particulière de l'équation différentielle $(E)$.

**2.** Résoudre l'équation différentielle $(E_0)$ : $y + y' = 0$.

**3.** Déterminer les solutions de l'équation différentielle $(E)$.

**4.** On admet que la fonction $g$ décrite dans la **partie A** est une solution de l'équation différentielle $(E)$. Déterminer alors l'expression de la fonction $g$.

**5.** Déterminer les solutions de l'équation différentielle $(E)$ dont la courbe admet exactement deux points d'inflexion.

## Partie C

On considère la fonction $f$ définie pour tout nombre réel $x$ par :

$$f(x) = (x^2 + 3x + 2)\mathrm{e}^{-x}$$

**1.** Démontrer que la limite de la fonction $f$ en $+\infty$ est égale à 0.

On admet par ailleurs que la limite de la fonction $f$ en $-\infty$ est égale à $+\infty$.

**2.** On admet que la fonction $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. On note $f'$ la fonction dérivée de $f$ sur $\mathbb{R}$.

**a.** Vérifier que, pour tout nombre réel $x$, $f'(x) = (-x^2 - x + 1)\mathrm{e}^{-x}$.

**b.** Déterminer le signe de la fonction dérivée $f'$ sur $\mathbb{R}$ puis en déduire les variations de la fonction $f$ sur $\mathbb{R}$.

**3.** Expliquer pourquoi la fonction $f$ est positive sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

**4.** On notera $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction $f$ dans un repère orthogonal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

On admet que la fonction $F$ définie pour tout nombre réel $x$ par $F(x) = (-x^2 - 5x - 7)\mathrm{e}^{-x}$ est une primitive de la fonction $f$.

Soit $\alpha$ un nombre réel positif.

Déterminer l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$, exprimée en unité d'aire, du domaine du plan délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}_f$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \alpha$.