Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour consulter tous nos sujets d'annales et corrigés du Bac Général Maths + SES, veuillez visiter :
bac-maths-ses.fr/annales-sujets-et-corriges

Corrigé du baccalauréat Polynésie 19 juin 2024

A. P. M. E. P.

Sujet 1

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Sauf mention contraire, toute réponse devra être justifiée

Exercice 1 **4 points**

$$\text{A}(2\,;\,1\,;\,-1),\quad \text{B}(-1\,;\,2\,;\,1) \text{ et } \quad \text{C}(5\,;\,0\,;\,-3).$$

On note $\mathscr{P}$ le plan d'équation cartésienne : $x+5y-2z+3=0$.

On note $\mathscr{D}$ la droite de représentation paramétrique : $\begin{cases} x &= -t+3 \\ y &= t+2 \\ z &= 2t+1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

Affirmation 1 :

On a $\overrightarrow{\text{OA}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{OC}}\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$: ces vecteurs ne sont pas colinéaires donc les points O, A et C ne sont pas alignés et définissent bien un plan.

D'autre part : $\vec{n}\cdot\overrightarrow{\text{OA}} = 2+0-2=0$ et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{\text{OC}} = 5+0-6=-1$; conclusion le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{\text{OA}}$ du plan (OAC) mais n'est pas orthogonal au vecteur $\overrightarrow{\text{OC}}$ de ce même plan ; il n'est donc pas normal au plan (OAC) : l'affirmation 1 est fausse.

Affirmation 2 :

On cherche la représentation paramétrique de (AB). On a :

$M(x\,;\,y\,;\,z) \in (\text{AB}) \iff \overrightarrow{\text{AM}} = u\overrightarrow{\text{AB}}$, avec $u \in \mathbb{R}$. Comme $\overrightarrow{\text{AB}}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ on obtient :

$$M(x\,;\,y\,;\,z) \in (\text{AB}) \iff \begin{cases} x-2 &= -3u \\ y-1 &= 1u \\ z+1 &= 2u \end{cases}, u \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} x &= 2-3u \\ y &= 1+u \\ z &= -1+2u \end{cases}, u \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Donc } M(x\,;\,y\,;\,z) \in (\text{AB}) \cap \mathscr{D} \iff \begin{cases} 2-3u &= 3-t \\ 1+u &= 2+t \\ -1+2u &= 1+2t \end{cases}$$

La deuxième équation donne $u = t+1$ et en remplaçant u par $t+1$ dans les deux autres on obtient le système :

$$\begin{cases} u &= t+1 \\ 2-3(t+1) &= 3-t \\ -1+2(1+t) &= 1+2t \end{cases} \iff \begin{cases} u &= t+1 \\ 2-3t-3 &= 3-t \\ -1+2+2t &= 1+2t \end{cases} \iff \begin{cases} u &= t+1 \\ -4 &= 2t \\ 1 &= 1 \end{cases} :$$

d'où $t=-2$ et $u = t+1 = -2+1 = -1$.

En remplaçant t ou u dans l'une des équations paramétriques de (AB) ou (D) on obtient le point commun de coordonnées (5 ; 0 ; -3), donc le point C.

Conclusion : l'affirmation 2 est vraie.

Affirmation 3 :

Si un point $M(x\,;\,y\,;\,z)$ est commun à la droite $\mathscr{D}$ et au plan $\mathscr{P}$ ses coordonnées vérifient l'équation paramétrique de $\mathscr{D}$ et l'équation cartésienne de $\mathscr{P}$, donc le système :

$$\begin{cases} x & = & -t+3 \\ y & = & t+2 \\ z & = & 2t+1 \\ x+5y-2z+3 & = & 0 \end{cases}, t \in \mathbb{R},$$

D'où en remplaçant dans l'équation du plan x, y et z par leurs valeurs en fonction de t :

$-t+3+5(t+2)-2(2t+1)+3=0 \iff -t+3+5t+10-4t-2+3=0 \iff 0t=-14$ cette équation n'a pas de solution : $\mathscr{D}$ et $\mathscr{P}$ sont parallèles (strictement) ; l'affirmation 3 est vraie

Affirmation 4 :

• Le milieu H de [BC] a pour coordonnées $\mathrm{H}\left(\dfrac{-1+5}{2} ; \dfrac{2+0}{2} ; \dfrac{1-3}{2}\right)$, soit H(2 ; 1 ; −1).

$3x_{\mathrm{H}} - y_{\mathrm{H}} - 2z_{\mathrm{H}} - 7 = 3\times 2 - 1 - 2\times(-1) - 7 = 0$ donc $\mathrm{H} \in Q$.

• Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 5-(-1) \\ 0-2 \\ -3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Le plan Q a pour vecteur normal le vecteur $\vec{v}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{\mathrm{BC}} = 2\vec{v}$ donc le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ est normal au plan Q.

L'affirmation 4 est vraie.

Exercice 2 — 5 points

Soit (E) l'équation différentielle : $y' + 0{,}02y = m$.

Partie A

1. On sait que l'équation différentielle $y' + 0{,}02y = 0$ a pour solutions les fonctions $t \longmapsto y = k\,\mathrm{e}^{-0{,}02t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

D'autre part une fonction constante $y = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ est solution de (E) (avec donc $y' = 0$) si $0 + 0{,}02\alpha = m \iff 0{,}02\alpha = m \iff \alpha = \dfrac{m}{0{,}02} = 50m$.

Conclusion : toutes les solutions de (E) sont les fonctions définies par

$$t \longmapsto y = k\,\mathrm{e}^{0{,}02t} + 50m, \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}$$

2. On sait que $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-0{,}02t} = 0$, donc $\lim\limits_{t\to+\infty} k\,\mathrm{e}^{-0{,}02t} = 0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} k\,\mathrm{e}^{-0{,}02t} + 50m = 50m$.

Or on a $\lim\limits_{t\to+\infty} k\,\mathrm{e}^{-0{,}02t} + 50m = 30$, donc $m = \dfrac{3}{5} = \dfrac{6}{10} = 0{,}6$.

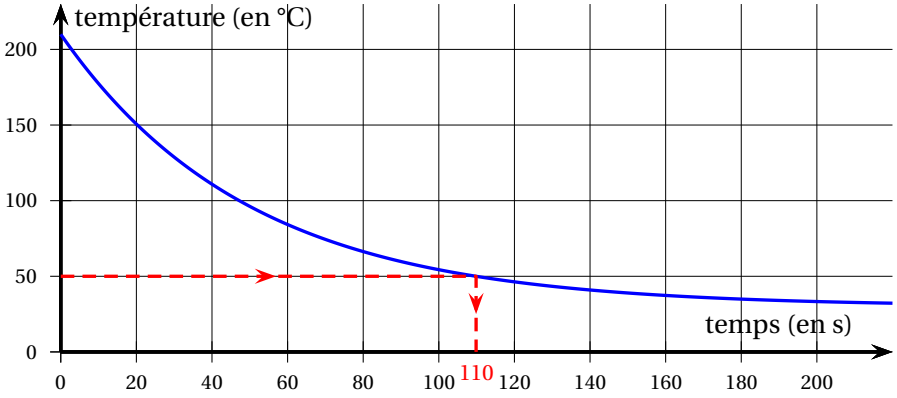
3. Avec $50m = 50\times 0{,}6 = 5\times 6 = 30$, les solutions de (E) sont les fonctions f définies par : $t \longmapsto f(t) = k\,\mathrm{e}^{-0{,}02t} + 30$

On a $f(0) = 210 \iff k\times 1 + 30 = 210 \iff k = 180$.

Finalement : $f(t) = 180\,\mathrm{e}^{-0{,}02t} + 30$.

Partie B

Soit f la fonction définie par $f(t) = 180\,\mathrm{e}^{-0{,}02t} + 30$.



1. **a.** On lit sur le graphique $T \approx 110$ (s).

b. $f(T) = 50 \iff 180\,\mathrm{e}^{-0,02T} + 30 = 50 \iff 180\,\mathrm{e}^{-0,02T} = 20$

$\iff 20 \times 9\,\mathrm{e}^{-0,02T} = 20 \times 1 \iff 9\,\mathrm{e}^{-0,02T} = 1 \iff \mathrm{e}^{-0,02T} = \dfrac{1}{9}$

$\iff -0,02T = \ln\left(\dfrac{1}{9}\right)$ par croissance de la fonction logarithme népérien) $\iff -0,02T = -\ln 9 \iff 0,02T = \ln 9$

$\iff T = \dfrac{\ln 9}{0,02}$

Donc $T = \dfrac{\ln 9}{0,02} = 50\ln 9 \approx 109,86$.

2. La valeur moyenne $\overline{t}$ de la température sur les 100 premières secondes est :

$$\overline{t} = \frac{1}{100}\int_0^{100}\left(180\,\mathrm{e}^{-0,02t} + 30\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{100}\left[-\frac{180}{0,02}\,\mathrm{e}^{-0,02t} + 30t\right]_0^{100}$$

$$= \frac{1}{100}\left[-9000\,\mathrm{e}^{-0,02t} + 30t\right]_0^{100} = \frac{1}{100}\left[-9000\,\mathrm{e}^{-2} + 9000 + 3000\right]$$

$$= \frac{1}{100}\left[9000\left(1 - \mathrm{e}^{-2}\right) + 3000\right] = 90\left(1 - \mathrm{e}^{-2}\right) + 30 \approx 107,82$$

soit environ 107,8 (°C).

Exercice 3 — 5 points

Les probabilités demandées seront exprimées sous forme de fractions irréductibles

Partie A

On lance trois fois de suite une pièce de monnaie bien équilibrée. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de fois, sur les trois lancers, où la pièce est retombée du côté « Face ».

1. On lance 3 fois une pièce de monnaie bien équilibrée donc il s'agit d'une répétition de 3 épreuves identiques et indépendantes; la variable aléatoire X qui compte le nombre de fois, sur les trois lancers, où la pièce est retombée du côté « Face » suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = \dfrac{1}{2}$.

2. $P(X = 0) = \binom{3}{0}\left(\dfrac{1}{2}\right)^0\left(1 - \dfrac{1}{2}\right)^{3-0} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^3 = \dfrac{1}{8}$

$$P(X=1)=\binom{3}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(1-\frac{1}{2}\right)^{3-1}=3\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{3}{8}$$

$$P(X=2)=\binom{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(1-\frac{1}{2}\right)^{3-2}=3\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{3}{8}$$

$$P(X=3)=\binom{3}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(1-\frac{1}{2}\right)^{3-3}=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$$

On complète le tableau donnant la loi de probabilité de X :

k	0	1	2	3
$P(X=k)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Partie B

Voici les règles d'un jeu où le but est d'obtenir trois pièces du côté « Face » en un ou deux essais :

- On lance trois pièces équilibrées :
  - Si les trois pièces sont tombées du côté « Face », la partie est gagnée ;
  - Sinon, les pièces tombées du côté « Face » sont conservées et on relance celles tombées du côté « Pile ».
- La partie est gagnée si on obtient trois pièces du côté « Face », sinon elle est perdue.

On considère les évènements suivants :

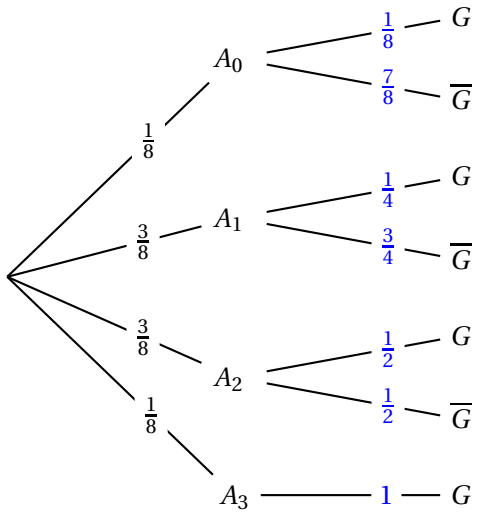
- G : « la partie est gagnée ».

  Et pour tout entier k compris entre 0 et 3, les évènements :
- A_k : « k pièces sont tombées du côté « Face » au premier lancer ».

1. $P_{A_1}(G)$ est la probabilité de l'événement « on a gagné sachant que lors du premier lancer, on a obtenu une fois « Face ». C'est donc la probabilité qu'au deuxième lancer, les deux pièces tombent sur « Face ».

Il y a 4 résultats équiprobables possibles : PP - PF - FP - FF, dont un seul favorable ; la probabilité cherchée est donc égale à $\frac{1}{4}$.

2. On complète l'arbre pondéré ci-dessous :



3. D'après la loi des probabilités totales on a :

$p = P(A_0) \times P_{A_0}(G) + P(A_1) \times P_{A_1}(G) + P(A_2) \times P_{A_2}(G) + P(A_3) \times P_{A_3}(G)$

$= \dfrac{1}{8} \times \dfrac{1}{8} + \dfrac{3}{8} \times \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{8} \times \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{8} \times 1 = \dfrac{1+6+12+8}{64} = \dfrac{27}{64}$

4. La partie a été gagnée. La probabilité qu'exactement une pièce soit tombée du côté « Face » à la première tentative est :

$$P_G(A_1) = \frac{P(A_1 \cap G)}{P(G)} = \frac{\frac{3}{8} \times \frac{1}{4}}{\frac{27}{64}} = \frac{\frac{3}{32}}{\frac{27}{64}} = \frac{3}{32} \times \frac{64}{27} = \frac{2}{9}.$$

5. Les parties sont à chaque fois indépendantes et la probabilité de gagner est à chaque fois égale à $\dfrac{27}{64}$. Pour n parties jouées, on appelle Z la variable aléatoire comptant le nombre de parties gagnées, Z suit une loi binomiale de paramètres n et $p = \dfrac{27}{64}$.

$$P(Z=0) = \binom{n}{0} \times \left(\frac{27}{64}\right)^0 \times \left(1 - \frac{27}{64}\right)^n = \left(\frac{37}{64}\right)^n \text{ donc } P(Z \geqslant 1) = 1 - \left(\frac{37}{64}\right)^n.$$

Il faut trouver $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(Z \geqslant 1) > 0{,}95$.

On résout donc l'inéquation :

$$1 - \left(\frac{37}{64}\right)^n > 0{,}95 \iff \left(\frac{37}{64}\right)^n < 0{,}05$$

$$\iff \ln\left(\left(\frac{37}{64}\right)^n\right) < \ln(0{,}05) \text{ (croissance de la fonction ln)}$$

$$\iff n \ln\left(\frac{37}{64}\right) < \ln(0{,}05)$$

$$\iff n > \frac{\ln(0{,}05)}{\ln\left(\frac{37}{64}\right)} \text{ car } \frac{1}{\ln\left(\frac{37}{64}\right)} < 0$$

Or la calculatrice donne $\dfrac{\ln(0{,}05)}{\ln\left(\frac{37}{64}\right)} \approx 5{,}46$. Il faut donc faire au moins 6 parties.

Exercice 4 — 6 points

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \dfrac{4}{5 - u_n}$.

Partie A

1. On complète la fonction Python suivante `suite(n)` qui prend comme paramètre le rang n et renvoie la valeur du terme u_n.

```
def suite(n):
    u = 3
    for i in range(n) :
        u = 4/(5 - u)
    return u
```

2. À la première boucle on trouve $u_1 = \dfrac{4}{5-3} = \dfrac{4}{2} = 2$.

   À la seconde on trouve $u_2 = \dfrac{4}{5-2} = \dfrac{4}{3} \approx 1{,}333$.

3. À l'aide des affichages ci-dessous, émettre une conjecture sur le sens de variation et une conjecture sur la convergence de la suite (u_n).

```
» suite(2)
1.3333333333333333
» suite(5)
1.0058479532163742
» suite(10)
1.0000057220349845
» suite(20)
1.000000000005457
```

   Les affichages successifs sont des approximations de u_2, u_5, u_{10}, u_{20} et leur examen laisse à conjecturer que la la limite de la suite est égale à 1.

Partie B

Soit f la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]-\infty\,;\,5[$ par : $f(x) = \dfrac{4}{5-x}$.

Ainsi, la suite (u_n) est définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. La fonction f quotient de fonctions dérivables sur $]-\infty\,;\,5[$, de dénominateur non nul puisque $x \neq 5$, est dérivable et sur cet intervalle :

   $f'(x) = \dfrac{0 - 4 \times (-1)}{(5-x)^2} = \dfrac{4}{(5-x)^2}$

   Quotient de deux carrés cette dérivée est strictement positive, donc la fonction f est strictement croissante sur $]-\infty\,;\,5[$.

2. Soit la propriété : $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 4$.

   Initialisation : on a vu que $u_1 = 2$ et on a $u_0 = 3$, donc $1 \leqslant u_1 \leqslant u_0 \leqslant 4$.

   La propriété est vraie au rang 0.

   Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 4$: ces nombres étant rangés dans l'ordre croissant leur images par f fonction strictement croissante pour des réels plus petits que 4, sont rangées dans le même ordre, soit $f(1) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n) \leqslant f(4)$.

Comme $f(1)=\dfrac{4}{5-1}=1$ et $f(4)=\dfrac{4}{5-4}=4$, on obtient $1\leqslant u_{n+2}\leqslant u_{n+1}\leqslant 4$.

Donc la propriété est vraie au rang $n+1$.

Conclusion : la propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire ; d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout n.

Donc, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $1\leqslant u_{n+1}\leqslant u_n\leqslant 4$.

3. **a.** Soit x un réel de l'intervalle $]-\infty\,;\,5[$.

On a pour $x<5$:

$$f(x)=x\iff\frac{4}{5-x}=x\iff 4=x(5-x)\iff 4=5x-x^2\iff x^2-5x+4=0.$$

b. Résoudre $f(x)=x$ dans l'intervalle $]-\infty\,;\,5[$, revient d'après la question précédente à résoudre l'équation du second degré $x^2-5x+4=0$.

Les racines de cette équation 1 et 4 sont évidentes (sinon on calcule le discriminant), donc :

$$x^2-5x+4=0\iff(x-1)(x-4)=0\iff\left[\begin{array}{lcl}x-1&=&0\\&\text{ou}&\\x-4&=&0\end{array}\right.\iff\left[\begin{array}{lcl}x&=&1\\&\text{ou}&\\x&=&4\end{array}\right.$$

La solution 4 est vraisemblable puisque $x\leqslant 4$, on a donc $S=\{1\,;\,4\}$.

4. L'encadrement démontré par récurrence montre deux choses : pour tout $n\in\mathbb{N}$

- $u_{n+1}\leqslant u_n$ signifie que la suite (u_n) est décroissante ;
- $1\leqslant u_n$ signifie que la suite (u_n) est minorée par 1.

La suite (u_n) décroissante et minorée par 1 est donc convergente vers un réel $\ell\geqslant 1$.

Par continuité de la fonction trinôme la limite ℓ est solution de l'équation précédente et cette solution est 1 ou 4, mais on a vu que $u_0=3$ et la suite étant décroissante la solution 4 est à rejeter..

Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1$.

La suite (u_n) converge vers 1.

5. Avec $u_0=4$, on a $u_1=\dfrac{4}{5-4}=\dfrac{4}{1}=4$ et donc en répétant le calcul $u_n=4$ quel que soit $n\in\mathbb{N}$.

Dans ce cas la suite est constante : tous ses termes sont égaux à 4, elle converge vers 4.

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.