Bac Général Maths + SES (Mathématiques et Sciences économiques et sociales)

# SUJET D'EXAMEN (SESSION OFFICIELLE)

Mathématiques - Session 2023

Sujet de l'examen national tel que publié pour la session indiquée. Source : sujets nationaux publiés par le ministère chargé de l'examen et les services académiques. Document mis à disposition par FormaV pour la révision.

Toutes les annales et leurs corrigés : https://bac-maths-ses.fr/annales-sujets-et-corriges

# ∽ Baccalauréat Nouvelle-Calédonie 28 août 2023 Jour 1 ∾
# ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé

Le sujet propose 4 exercices

## EXERCICE 1 5 points

Une entreprise de location de bateaux de tourisme propose à ses clients deux types de bateaux : bateau à voile et bateau à moteur.

Par ailleurs, un client peut prendre l'option PILOTE. Dans ce cas, le bateau, qu'il soit à voile ou à moteur, est loué avec un pilote.

On sait que :

- 60 % des clients choisissent un bateau à voile ; parmi eux, 20 % prennent l'option PILOTE.
- 42 % des clients prennent l'option PILOTE.

On choisit au hasard un client et on considère les évènements :

- $V$ : « le client choisit un bateau à voile » ;
- $L$ : « le client prend l'option PILOTE ».

*Les trois parties peuvent être traitées de manière indépendante*

### Partie A

1. Traduire la situation par un arbre pondéré que l'on complètera au fur et à mesure.
2. Calculer la probabilité que le client choisisse un bateau à voile et qu'il ne prenne pas l'option PILOTE.
3. Démontrer que la probabilité que le client choisisse un bateau à moteur et qu'il prenne l'option PILOTE est égale à 0,30.
4. En déduire $P_{\overline{V}}(L)$, probabilité de $L$ sachant que $V$ n'est pas réalisé.
5. Un client a pris l'option PILOTE.

   Quelle est la probabilité qu'il ait choisi un bateau à voile ? Arrondir à 0,01 près.

### Partie B

Lorsqu'un client ne prend pas l'option PILOTE, la probabilité que son bateau subisse une avarie est égale à 0,12. Cette probabilité n'est que de 0,005 si le client prend l'option PILOTE.

On considère un client. On note $A$ l'évènement : « son bateau subit une avarie ».

1. Déterminer $P(L \cap A)$ et $P\left(\overline{L} \cap A\right)$.
2. L'entreprise loue 1 000 bateaux.
   À combien d'avaries peut-elle s'attendre ?

**Partie C**

On rappelle que la probabilité qu'un client donné prenne l'option PILOTE est égale à 0,42.

On considère un échantillon aléatoire de 40 clients. On note $X$ la variable aléatoire comptant le nombre de clients de l'échantillon prenant l'option PILOTE.

1. On admet que la variable aléatoire $X$ suit une loi binomiale. Donner sans justification ses paramètres.
2. Calculer la probabilité, arrondie à $10^{-3}$, qu'au moins 15 clients prennent l'option PILOTE.

**EXERCICE 2 5 points**

On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel $n$, par :

$$u_{n+1} = 5u_n - 4n - 3.$$

1. **a.** Démontrer que $u_1 = 12$.
   **b.** Déterminer $u_2$ en détaillant le calcul.
   **c.** À l'aide de la calculatrice, conjecturer le sens de variation ainsi que la limite de la suite $(u_n)$.
2. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, on a :
   $$u_n \geqslant n + 1.$$
   **b.** En déduire la limite de la suite $(u_n)$.
3. On considère la suite $(v_n)$ définie pour tout entier naturel $n$ par :
   $$v_n = u_n - n - 1.$$
   **a.** Démontrer que la suite $(v_n)$ est géométrique.
   Donner sa raison et son premier terme $v_0$.
   **b.** En déduire, pour tout entier naturel $n$, l'expression de $v_n$ en fonction de $n$.
   **c.** En déduire que pour tout entier naturel $n$ :
   $$u_n = 2 \times 5^n + n + 1.$$
   **d.** En déduire le sens de variation de la suite $(u_n)$.
4. On considère la fonction ci-contre, écrite de manière incomplète en langage Python et destinée à renvoyer le plus petit entier naturel $n$ tel que $u_n \geqslant 10^7$.
   **a.** Recopier le programme et compléter les deux instructions manquantes.
   **b.** Quelle est la valeur renvoyée par cette fonction ?

```
def suite() :
    u = 3
    n = 0
    while ... :
        u = ...
        n = n + 1
    return n
```

**EXERCICE 3 5 points**

*Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.*
*Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.*
*Aucune justification n'est demandée.*
*Une réponse fausse, une absence de réponse, ou une réponse multiple, ne rapporte ni n'enlève de point.*

**1.** On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x+1)\mathrm{e}^x$.

Une primitive $F$ de $f$ sur $\mathbb{R}$ est définie par :

**a.** $F(x) = 1 + x\,\mathrm{e}^x$ **b.** $F(x) = (1+x)\,\mathrm{e}^x$

**c.** $F(x) = (2+x)\,\mathrm{e}^x$ **d.** $F(x) = \left(\dfrac{x^2}{2} + x\right)\mathrm{e}^x$.

Dans toute la suite de l'exercice, on se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k}\right)$

**2.** On considère les droites $(d_1)$ et $(d_2)$ dont des représentations paramétriques sont respectivement :

$$(d_1)\begin{cases} x = 2+r \\ y = 1+r \\ z = -r \end{cases} (r\in\mathbb{R}) \quad \text{et } (d_2)\begin{cases} x = 1-s \\ y = -1+s \\ z = 2-s \end{cases} (s\in\mathbb{R})$$

Les droites $(d_1)$ et $(d_2)$ sont :

**a.** sécantes. **b.** strictement parallèles.
**c.** confondues. **d.** non coplanaires.

**3.** On considère le plan $(P)$ dont une équation cartésienne est :

$$2x - y + z - 1 = 0.$$

On considère la droite $(\Delta)$ dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 2+u \\ y = 4+u \\ z = 1-u \end{cases} (u\in\mathbb{R})$$

La droite $(\Delta)$ est :

**a.** sécante et non orthogonale au plan $(P)$. b. incluse dans le plan $(P)$.
**c.** strictement parallèle au plan $(P)$. **d.** orthogonale au plan $(P)$.

**4.** On considère le plan $(P_1)$ dont une équation cartésienne est $x-2y+z+1=0$, ainsi que le plan $(P_2)$ dont une équation cartésienne est $2x+y+z-6=0$.

Les plans $(P_1)$ et $(P_2)$ sont :

**a.** sécants et perpendiculaires. **b.** confondus.
**c.** sécants et non perpendiculaires. **d.** strictement parallèles.

**5.** On considère les points E(1 ; 2 ; 1), F(2 ; 4 ; 3) et G(−2 ; 2 ; 5).
On peut affirmer que la mesure $\alpha$ de l'angle $\widehat{\text{FEG}}$ vérifie :

**a.** $\alpha = 90°$ **b.** $\alpha > 90°$ **c.** $\alpha = 0°$ **d.** $\alpha \approx 71°$

**EXERCICE 4 5 points**

On considère la fonction $f$ définie pour tout réel $x$ de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = 5x^2 + 2x - 2x^2\ln(x).$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de $f$ dans un repère orthogonal du plan.
On admet que $f$ est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
On note $f'$ sa dérivée et $f''$ sa dérivée seconde.

**1.** **a.** Démontrer que la limite de la fonction $f$ en 0 est égale à 0.
**b.** Déterminer la limite de la fonction $f$ en $+\infty$.
**2.** Déterminer $f'(x)$ pour tout réel $x$ de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
**3.** **a.** Démontrer que pour tout réel $x$ de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$

$$f''(x) = 4(1 - \ln(x)).$$

**b.** En déduire le plus grand intervalle sur lequel la courbe $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de ses tangentes.
**c.** Dresser le tableau des variations de la fonction $f'$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
(On admettra que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f'(x) = 2$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = -\infty$.)
**4.** **a.** Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet dans l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ une unique solution $\alpha$ dont on donnera un encadrement d'amplitude $10^{-2}$.
**b.** En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ ainsi que le tableau des variations de la fonction $f$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
**5.** **a.** En utilisant l'égalité $f'(\alpha) = 0$, démontrer que :

$$\ln(\alpha) = \frac{4\alpha + 1}{2\alpha}.$$

En déduire que $f(\alpha) = \alpha^2 + \alpha$.
**b.** En déduire un encadrement d'amplitude $10^{-1}$ du maximum de la fonction $f$.