Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour consulter tous nos sujets d'annales et corrigés du Bac Général Maths + SES, veuillez visiter :
bac-maths-ses.fr/annales-sujets-et-corriges

∽ Corrigé du baccalauréat Amérique du Sud 26 septembre 2023 ∾
ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ Jour 1

Exercice 1 **5 points**

Partie A

$$f(x) = 1 + x^2 - 2x^2\ln(x).$$

1. • Limite en 0 : On sait que $\lim\limits_{x\to 0} x^2\ln(x) = 0$, que $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$, donc par somme de limites : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$.

• Limite en $+\infty$: en écrivant $f(x) = 1 + x^2(1 - 2\ln(x))$, on a :

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} -2\ln(x) = -\infty$, puis $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - 2\ln(x) = -\infty$ et enfin par produit de limites :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

2. Pour tout réel de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, $f'(x) = 2x - 4x\ln(x) - 2x^2 \times \dfrac{1}{x} = 2x - 4x\ln(x) - 2x = -4x\ln(x)$.

3. Puisque $x \geqslant 0$, le signe de $f'(x)$ est l'opposé de celui de $\ln(x)$.

On sait que $\ln(x) < 0$ sur $[0\,;\,1[$, donc $f'(x) > 0$ sur $[0\,;\,1[$ et que $\ln(x) > 0$ sur $]1\,;\,+\infty[$, donc $f'(x) < 0$ sur $]1\,;\,+\infty[$.

La fonction f est donc :

• croissante sur $[0\,;1]$ de 1 à $f(1) = 1 + 1 - 2 \times 1 \times 0 = 2$;

• décroissante sur $[1\,;\,+\infty[$ de 2 à moins l'infini.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	+	0	−	
$f(x)$	‖1	↗	2	↘	$-\infty$

4. La fonction f est continue car dérivable sur l'intervalle $[1\,;\,+\infty]$ et décroissante de 2 à moins l'infini : d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel unique α, avec $\alpha \in]1\,;\,+\infty[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

Comme $f(\mathrm{e}) = 1 + \mathrm{e}^2(1 - 2\ln \mathrm{e}) = 1 + \mathrm{e}^2(1-2) = 1 - \mathrm{e}^2 \approx -6{,}4$.

En appliquant le même théorème, on a donc $1 < \alpha < \mathrm{e}$.

On admet dans la suite de l'exercice, que l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution sur l'intervalle $]0\,;\,1]$.

Rem. : comme $0 \notin [1\,;\,2]$ le même théorème montre qu'il n'existe pas de réel $\beta \in [0\,;\,1]$ tel que $f(\beta) = 0$.

5. On part de l'intervalle [1 ; 2,7], (avec e ≈ 2,7) `dichotomie(1)` donne par dichotomie un encadrement de α par deux réels a et b tels que $b-a \leqslant 10^{-1}$.

Comme $\alpha \approx 1,9$, C et D sont exclus et A ne donne pas un encadrement au dixième : reste la proposition B.

Partie B

On considère la fonction g définie sur l'intervalle]0 ; +∞[, par

$$g(x) = \frac{\ln(x)}{1+x^2}.$$

On admet que g est dérivable sur l'intervalle]0 ; +∞[et on note g' sa fonction dérivée.
On note $\mathscr{C}_g$ la courbe représentative de la fonction g dans le plan rapporté à un repère $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. g est un quotient de fonctions dérivables sur]0 ; +∞[, le dénominateur étant non nul (supérieur ou égal à 1), donc quel que soit $x \in]0 ; +\infty[$:

$$g'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times \left(1+x^2\right) - 2x\ln(x)}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{\dfrac{1+x^2-2x^2\ln(x)}{x}}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{1+x^2-2x^2\ln(x)}{x\left(1+x^2\right)^2} = \frac{f(x)}{x\left(1+x^2\right)^2}.$$

2. Le résultat précédent montre que puisque $x > 0$ et $\left(1+x^2\right)^2 > 0$, le signe de $g'(x)$ est celui du numérateur donc le signe de $f(x)$.

Or on a vu (Partie A question 3.) que $f(x) > 0$ sur]0 ; α[et $f(x) < 0$ sur]α ; +∞[.

La fonction g est donc croissante sur [0 ; α], puis décroissante sur [α ; +∞[avec un maximum $g(\alpha)$.

Rem. : on sait que $f(\alpha) = 0 \iff 1+\alpha^2-2\alpha^2\ln\alpha \iff 2\alpha^2\ln\alpha = 1+\alpha^2 \iff$
$\ln\alpha = \dfrac{1+\alpha^2}{2\alpha^2}$.

Donc $g(\alpha) = \dfrac{f(\alpha)}{1+\alpha^2} = \dfrac{\dfrac{1+\alpha^2}{2\alpha^2}}{1+\alpha^2} = \dfrac{1}{2\alpha^2}$.

3. On note T_1 la tangente à $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse 1 et on note T_α la tangente à $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse α.

- On a $M(x\,;\,y) \in T_1 \iff y-g(1) = g'(1)(x-1) \iff y-0 = \dfrac{1}{2}(x-1) = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}$;
- On a vu que la fonction a un maximum en α et en ce point le nombre dérivé égal au coefficient directeur de la tangente en ce point (donc T_α) est nul : la tangente est donc horizontale d'équation $y = g(\alpha)$ ou $y = \dfrac{1}{2\alpha^2}$.

Donc $M(x\,;\,y) \in T_1 \cap T_\alpha \iff \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2\alpha^2}$, soit
$x-1 = \dfrac{1}{\alpha^2} \iff x = 1+\dfrac{1}{\alpha^2}$ et $y = \dfrac{1}{2\alpha^2}$.
Donc $T_1 \cap T_\alpha \left(1+\dfrac{1}{\alpha^2}\,;\,\dfrac{1}{2\alpha^2}\right)$.

Exercice 2 **5 points**

1. **a.** On a $\dfrac{4\,921}{18\,221\,965} \approx 0{,}016\,1 \approx 1{,}6\,\%$.

b. De même $\dfrac{4\,921}{18\,221\,965} \approx 0{,}000\,3 < 0{,}001$ soit moins de 0,1 %.

2. **a.** Les 20 accouchements sont des évènements indépendants et la probabilité d'avoir une naissance est égale à 0,016, donc la variable X suit une loi binomiale $\mathscr{B}(20\,;\,0{,}016)$.

On a $p(X=1) = 20 \times 0{,}016 \times 0984^{19} \approx 0{,}235\,5$ soit 0,236 au millième près.

b. On a $p(X \geqslant 1) = 1 - p(X=0) = 1 - 0{,}984^n \times 0{,}016^0 = 1 - 0{,}984^n$.

Il faut donc résoudre l'inéquation :

$1 - 0{,}984^n \geqslant 0{,}99 \iff 0{,}01 \geqslant 0{,}984^n \iff$ (par croissance de la fonction logarithme népérien) $\ln 0{,}01 \geqslant n \ln 0{,}984 \iff n \geqslant \dfrac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}984}$ soit $n \geqslant 285{,}5$.

Donc en moyenne, sur 286 accouchements il y a un accouchement double.

3. Dans cette maternité, parmi les naissances double, on estime qu'il y a 30 % de jumeaux monozygotes (appelés « vrais jumeaux » qui sont obligatoirement de même sexe : deux garçons ou deux filles) et donc 70 % de jumeaux dizygotes (appelés « faux jumeaux », qui peuvent être de sexes différents : deux garçons, deux filles ou un garçon et une fille).

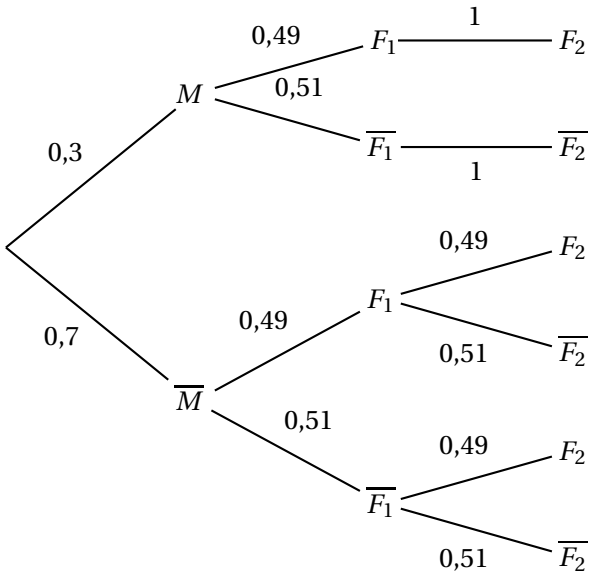
Dans le cas de naissances doubles, on admet que, comme pour les naissances ordinaires, la probabilité d'être une fille à la naissance est égale à 0,49 et que celle d'être un garçon à la naissance est égale à 0,51.

Dans le cas d'une naissance double de jumeaux dizygotes, on admet aussi que le sexe du second nouveau–né des jumeaux est indépendant du sexe du premier nouveau-né.

On choisit au hasard un accouchement double réalisé dans cette maternité et on considère les évènements suivants :

- M : « les jumeaux sont monozygotes » ;
- F_1 : « le premier nouveau–né est une fille » ;
- F_2 : « le second nouveau–né est une fille ».

On notera $p(A)$ la probabilité de l'évènement A et $\overline{A}$ l'évènement contraire de A.



a. Voir ci-dessus

b. On a en suivant les première et troisième branche de l'arbre pondéré :
$p(F_1 \cap F_2) = 0,3 \times 0,49 \times 1 + 0,7 \times 0,49 \times 0,49 = 0,147 + 0,16807 = 0,31507 \approx 0,316$.

c. Sachant que les nouveaux-nés sont des jumelles, la probabilité qu'elles soient monozygotes est la probabilité conditionnelle :
$p_{F_1 \cap F_2}(M) = \dfrac{p(M \cap (F_1 \cap F_2))}{p(F_1 \cap F_2)} = \dfrac{0,3 \times 0,49 \times 1}{0,31507} \approx 0,4665$ soit 0,467 au millième près.

EXERCICE 3 **5 points**

A(0 ; 4 ; 16), B(0 ; 4 ; −10), C(4 ; −8 ; 0) et K(0 ; 4 ; 3).

1. **a.** On a $CK^2 = (4-0)^2 + (-8-4)^2 + (0-3)^2 = 16 + 144 + 9 = 169 = 13^2$, donc
$CK = 13 \iff C \in S$.

b. Calculons les coordonnées de $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 4 \\ -12 \\ -16 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 4 \\ -12 \\ 10 \end{pmatrix}$

D'où le produit scalaire : $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 16 + 144 - 160 = 160 - 160 = 0$: les vecteurs sont orthogonaux, les droites (AC) et (BC) sont perpendiculaires en C, donc le triangle ABC est rectangle en C.

2. **a.** • $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 12 - 12 + 0 = 0$: $\vec{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AC}$;
• $\vec{n} \cdot \overrightarrow{BC} = 12 - 12 + 0 = 0$: $\vec{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{BC}$.
Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$ ne sont pas colinéaires (leurs coordonnées sont égales mais pas les dernières), donc $\vec{n}$ normal deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) est normal à ce plan.

b. On sait qu'alors les coordonnées de $\vec{n}$ sont les coefficients de x, y et z dans l'équation du plan (ABC).

On a donc $M(x\,;\,y\,;\,z) \in (\text{ABC}) \iff 3x+y+d=0$, avec $d \in \mathbb{R}$.

Or par exemple :

$\text{C}(4\,;\,-8\,;\,0) \in (\text{ABC}) \iff 3\times 4+(-8)+d=0 \iff 12-8+d=0 \iff d=-4$.

Finalement $M(x\,;\,y\,;\,z) \in (\text{ABC}) \iff 3x+y-4=0$.

3. **a.** Si D appartient à l'axe des abscisses son ordonnée et sa cote sont nuls, donc D a pour coordonnées $(x\,;\,0\,;\,;0)$.

De plus $\text{KD}=13 \Rightarrow \text{KD}^2=13^2=169=(x-0)^2+(0-4)^2+(0-3)^2 \iff (x-0)^2+16+9=169 \iff \iff x^2=144 \iff x^2=12^2 \iff x^2-12^2=0 \iff (x+12)(x-12)=0 \begin{cases} x-4+12 &= 0 \\ x-- &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+12 &= 0 \\ x-12 &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x &= -12 \\ x &= 12 \end{cases}$

Conclusion D(12 ; 0 ; 0).

b. Si la droite Δ est perpendiculaire au plan (ABC) un de ses vecteurs directeurs est le vecteur $\vec{n}$ normal à ce plan. On a donc :

$M(x\,;\,y\,;\,z) \in \Delta \iff \overrightarrow{\text{D}M}=t\vec{n}$, avec $t \in \mathbb{R}$. Cette égalité se traduit par le système :

$$\begin{cases} x-12 &= 3t \\ y-0 &= 1t \\ z-0 &= 0t \end{cases} \iff \begin{cases} x &= 12+3t \\ y &= t \\ z &= 0t \end{cases}.$$

c. D appartient à Δ perpendiculaire au plan (ABC) ; cherchons les coordonnées du projeté orthogonal de D sur le plan (ABC) : I

I appartient au plan (ABC) et appartient à Δ, ses coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$ vérifient donc l'équation du plan (ABC) et les équations paramétriques de Δ soit le système :

$$\begin{cases} x &= 12+3t \\ y &= t \\ z &= 0t \\ 3x+y-4 &= 0 \end{cases}$$

En remplaçant dans la dernière équation x et y par leurs valeurs en fonction de t on obtient $3(12+3t)+t-4=0 \iff 36+9t+t-4=0 \iff 10t+32=0$

$\iff 10t=-32 \iff t=-\dfrac{32}{10}=-\dfrac{16}{5}$.

En reportant cette valeur dans les deux premières équations de Δ, on obtient :

$x=12-3\times\dfrac{16}{5}=\dfrac{60}{5}-\dfrac{48}{5}=\dfrac{12}{5}$; $y=-\dfrac{16}{5}$ et $z=0$.

$\text{I}\left(\dfrac{12}{5}\,;\,-\dfrac{16}{5}\,;0\right)$.

On calcule $\text{DI}^2=\left(\dfrac{12}{5}-12\right)^2+\left(-\dfrac{16}{5}-0\right)^2+0^2=\left(-\dfrac{48}{5}\right)^2+\left(-\dfrac{16}{5}\right)^2=\dfrac{2304}{25}+\dfrac{256}{25}=\dfrac{2560}{25}=\dfrac{256\times 10}{25}$.

Finalement $\text{DI}=\sqrt{\dfrac{256\times 10}{25}}=\dfrac{16\sqrt{10}}{5}$.

4. En prenant la base (ABC) rectangle en C : son aire est donc égale à : $\dfrac{\text{AC}\times\text{BC}}{2}$.

$AC^2 = 16 + 144 + 256 = 416$; $AC = \sqrt{416}$;
$BC^2 = 16 + 144 + 100 = 260$; $BC = \sqrt{260}$.
Donc $\mathscr{A}(ABC) = \dfrac{\sqrt{416} \times \sqrt{260}}{2} = 52\sqrt{10}$
Donc avec $h = \dfrac{16\sqrt{10}}{5}$, on obtient :
$V = \dfrac{1}{3} \times 52\sqrt{10} \times \dfrac{16\sqrt{10}}{5} = \dfrac{1664}{3} \approx 554,7$ soit 555 à l'unité près.

Exercice 4 **5 points**

Partie A

$$u_{n+1} = 2u_n(1 - u_n).$$

Cette relation de récurrence s'écrit $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x(1 - x).$$

1. f est une fonction polynomiale donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle :
$f(x) = 2x - 2x^2$, d'où $f'(x) = 2 - 4x = 2(1 - 2x)$.
On a :
- $f'(x) = 0 \iff 1 - 2x = 0 \iff x = \dfrac{1}{2}$;
- $f'(x) > 0 \iff 1 - 2x > 0 \iff x < \dfrac{1}{2}$; la dérivée est positive sur $\left[0\,;\,\dfrac{1}{2}\right]$, la fonction f est donc croissante sur cet intervalle.
- $f'(x) < 0 \iff 1 - 2x < 0 \iff x > \dfrac{1}{2}$;

2. On admet que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{2}$.
- $u_1 = 2u_0(1 - u_0) = 2 \times 0,3 \times 0,7 = 0,42$.
- Démonstration par récurrence :
  - *Initialisation* : on a $u_0 \leqslant u_1$ car $0,3 \leqslant 0,42$.
  - *Hérédité* On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \leqslant u_{n+1}$.
    Comme on suppose que $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}$ on a par croissance de la fonction f sur $\left[0\,;\,\dfrac{1}{2}\right]$, $f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f\left(\dfrac{1}{2}\right)$, soit
    $u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 2 \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2}$, ou encore $u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant \dfrac{1}{2}$: l'encadrement est vrai au rang $n + 1$.
    La relation est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang $n \in \mathbb{N}$ elle l'est encore au rang $n + 1$: d'après le principe de récurrence on a démontré que :
    pour tout rentier naturel n, $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}$

3. Cet encadrement montre que

— la suite (u_n) est croissante et

— la suite (u_n) est majorée par $\dfrac{1}{2}$.

Conclusion la suite (u_n) croissante et majorée converge vers une limite $\ell \leqslant \dfrac{1}{2}$.

4. La fonction f étant continue on a donc :

$\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} 2u_n(1-u_n)$, soit

$\ell = 2\ell(1-\ell) \iff \ell = 2\ell - 2\ell^2 \iff 2\ell^2 - \ell = 0 \iff \ell(2\ell-1) = 0 \iff \left\{\begin{array}{lcl} \ell & = & 0 \\ 2\ell-1 & = & 0 \end{array}\right. \iff$

$\left\{\begin{array}{lcl} \ell & = & 0 \\ \ell & = & \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$ La seule solution acceptable est $\ell = \dfrac{1}{2}$.

Partie B

$$P_{n+1} - P_n = P_n(1 - b \times P_n), \text{ où } b \text{ est un réel strictement positif.}$$

Le réel b est un facteur de freinage qui permet de tenir compte du caractère limité des ressources du milieu dans lequel évoluent ces individus.

1. Dans cette question $b = 0$.

a. La relation de récurrence s'écrit alors $P_{n+1} - P_n = P_n(1 - 0 \times P_n)$, soit

$P_{n+1} - P_n = P_n \iff P_{n+1} = 2P_n$, donc $P_{n+1} = 2P_n$: cette égalité montre que la suite (P_n) est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $P_0 = 3$.

b. On sait quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $P_n = P_0 \times 2^n = 3 \times 2^n$: la limite de la suite (P_n) est plus l'infini (irréaliste)

2. Dans cette question $b = 0,2$. On a donc $P_{n+1} - P_n = P_n(1 - 0,2P_n)$

a. On a $v_0 = 0,1 \times P_0 = 0,1 \times 3 = 0,3$.

La relation de récurrence devient :

$P_{n+1} - P_n = P_n(1 - 0,2 \times P_n) \iff P_{n+1} - P_n = P_n - 0,2P_n^2$, d'où

$P_{n+1} = 2P_n - 0,2P_n^2$. (1)

Or $v_{n+1} = 0,1P_{n+1} = 0,1\left(2P_n - 0,2P_n^2\right) = 0,2\left(P_n - 0,1P_n^2\right)$.

Comme $v_n = 0,1 \times P_n \iff 10v_n = P_n$, l'égalité ci-dessus devient :

$v_{n+1} = 0,2\left(10v_n - 0,1 \times (10v_n)^2\right)$, soit

$v_{n+1} = 0,2\left(10v_n - 10v_n^2\right) = 2v_n(1 - v_n)$.

b. La relation de la question précédente montre que la suite (v_n) est la suite (u_n) de la **Partie A** et on a vu que cette suite converge vers $\dfrac{1}{2}$.

On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \dfrac{1}{2}$.

Or $P_n = 10v_n$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = 10 \times \dfrac{1}{2} = 5$.

Finalement la population se rapprochera de 5 000 individus.

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.