Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour consulter tous nos sujets d'annales et corrigés du Bac Général Maths + SES, veuillez visiter :
bac-maths-ses.fr/annales-sujets-et-corriges

Corrigé du baccalauréat Polynésie 13 mars 2023

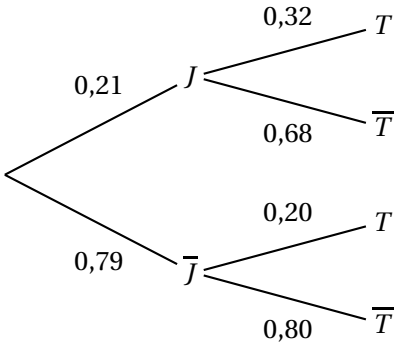
Sujet 1

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

EXERCICE 1 4 points **Thème : probabilités**

Partie A

La situation peut se traduire par l'arbre pondéré suivant :



1. On calcule : $p(J \cap T) = p(J) \times p_J(T) = 0,21 \times 0,32 = 0,0672$.

2. On a de même $p\left(\overline{J} \cap T\right) = p\left(\overline{J}\right) \times p_{\overline{J}}(T) = 0,79 \times 0,20 = 0,158$.

D'après la loi des probabilités totales :

$p(T) = p(J \cap T) + p\left(\overline{J} \cap T\right) = 0,0672 + 0,158 = 0,2252$.

3. Il faut trouver la probabilité conditionnelle :

$p_T(J) = \dfrac{p(T \cap J)}{p(T)} = \dfrac{p(J \cap T)}{p(T)} = \dfrac{0,0672}{00,2252} \approx 0,298$, soit 0,30 au centième près.

Partie B

1. On suppose que la population de la ville est assez importante pour que la sélection de 120 personnes puisse être assimilé à un tirage avec remise de 120 personnes chacune d'elles ayant une probabilité d'avoir moins de 35 ans de 0,30.

La loi de probabilité de X suit donc une loi binomiale $\mathscr{B}(120\ ;\ 0,30)$.

2. La calculatrice donne $p(X \geqslant 50) = 1 - p(X \leqslant 49) \approx 0,0044$.

EXERCICE 2 5 points **Thème : géométrie dans l'espace**

1. **a.** L'équation paramétrique de d_2 montre qu'elle contient le point de coordonnées $(-3\ ;\ 0\ ;\ 5)$ et de vecteur directeur dont les composantes sont les coefficients de k donc $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$.

b. Les vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont manifestement pas colinéaires, donc les droites d_1 et d_2 ne sont pas parallèles.

c. Une représentation paramétrique de la droite d_1 est $\begin{cases} x &= 2+t \\ y &= 3-t \\ z &= t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

S'il existe un point commun aux deux droites, il doit donc exister des réels k et t tels que :

$$\begin{cases} x = 2+t = 2k-3 \\ y = 3-t = k \\ z = t = 5 \end{cases}$$

La dernière équation donne $t = 5$, puis la deuxième $k = 3-5 = -2$ et en remplaçant dans la première $2+5 = -4-3$: cette égalité est fausse, donc d_1 et d_2 ne sont pas sécantes.

d. Les droites n'étant ni sécantes ni parallèles elles ne sont pas coplanaires.

2. **a.** On a $\vec{w} \cdot \vec{u} = -1-2+3 = 0$;
de même $\vec{w} \cdot \vec{v} = -2+2+0 = 0$, donc le vecteur $\vec{w}$ est orthogonal aux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

b. Un point commun au plan P et à la droite d_2 a ses coordonnées qui vérifient le système :

$$\begin{cases} x = 2k-3 \\ y = k \\ z = 5 \\ 5x+4y-z-22 = 0 \end{cases}, t \in \mathbb{R},$$ d'où en remplaçant x, y, z dans la dernière équation :

$5(2k-3)+4(k)-5-22 = 0 \iff 10k-15+4k-27 = 0 \iff 14k = 42 \iff 7k = 21 \iff k = 3$.
Le point commun au plan P et à la droite d_2 a pour coordonnées (6 - 3 ; 3 ; 5) soit M(3 ; 3 ; 5).

3. **a.** Δ et d_1 ont leurs vecteurs directeurs $\vec{w}$ et $\vec{u}$ orthogonaux donc ces droites sont orthogonales.

Ces deux droites sont sécantes s'il existent des réels t et r tels que

$$\begin{cases} x = 2+t = -r+3 \\ y = 3-t = 2r+3 \\ z = t = 3r+5 \end{cases}, t, r \in \mathbb{R}.$$

La dernière équation $t = 3r+5$ donne en remplaçant dans la deuxième :
$3-3r-5 = 2r+3 \iff -5 = 5r \iff r = -1$, d'où $t = 5-3 = 2$ et en remplaçant dans la première équation on obtient $2+2 = 1+3$, égalité vraie.

Δ et d_1 sont sécantes au point L(4 ; 1 ; 2)

b. Conclusion : on a trouvé une droite Δ perpendiculaire commune aux deux droites d_1 et d_2.

EXERCICE 3 5 points — Thème : fonction exponentielle, algorithmique

1. **Affirmation :** La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x - x$ est convexe.

f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

On a $f'(x) = \mathrm{e}^x - 1$, puis $f''(x) = \mathrm{e}^x$.

On sait que $\mathrm{e}^x > 0$ quel que soit x, donc f est convexe sur $\mathbb{R}$. l'affirmation est vraie.

2. **Affirmation :** L'équation $(2\mathrm{e}^x - 6)(\mathrm{e}^x + 2) = 0$ admet $\ln(3)$ comme unique solution dans $\mathbb{R}$.

Cette équation se traduit par :

$$\begin{cases} 2e^x - 6 &= 0 \quad \text{ou} \\ e^x + 2 &= 0 \end{cases}$$

• On sait (voir ci-dessus) que $e^x > 0 \Rightarrow e^x + 2 > 2 > 0$. Donc la deuxième équation n'a pas de solution.

• $2e^x - 6 = 0 \iff 2e^x = 6 \iff e^x = 3 \iff x = \ln 3$, par croissance de la fonction logarithme népérien : c'est la seule solution donc l'affirmation est vraie.

3. Affirmation :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}-1}{e^x - x} = 0.$$

On a $\dfrac{e^{2x}-1}{e^x - x} = \dfrac{e^{2x}\left(1-e^{-2x}\right)}{e^x(1-xe^{-x})} = e^x \dfrac{\left(1-e^{-2x}\right)}{(1-xe^{-x})}$.

• Au numérateur on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-2x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - e^{-2x} = 1$;

• Au dénominateur $xe^{-x} = \dfrac{x}{e^x}$ et l'on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - xe^{-x} = 1$.

Le quotient a pour limite 1 et comme $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, on a finalement $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{2x}-1}{e^x - x} = +\infty$: l'affirmation est fausse.

4. La fonction F est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle :

$F'(x) = 2e^{3x} + 3(2x+1)e^{3x} = e^{3x}(2+6x+3) = (6x+5)e^{3x} = f(x)$.

D'autre part $F(0) = 1e^0 + 4 = 1 + 4 = 5$

F est donc la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui prend la valeur 5 quand $x = 0$, l'affirmation est vraie.

5. L'execution donne $\dfrac{1+9+\ldots+5}{10} = \dfrac{50}{10} = 5$.

L'affirmation est fausse.

EXERCICE 4 6 points **Thème : suites, fonctions**

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -1$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 0,9u_n - 0,3.$$

1. a. Démonstration par récurrence :

Initialisation : On a bien $u_0 = 2 \times 0,9^0 - 3 = 2 - 3 = -1$: la relation est vraie au rang 0 ;

Hérédité : On suppose que pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2 \times 0,9^n - 3$.

Alors par définition de la suite $u_{n+1} = 0,9u_n - 0,3$ ou $u_{n+1} = 0,9(2 \times 0,9^n - 3) - 0,3 = 2 \times 0,9^{n+1} - 2,7 - 0,3 = 2 \times 0,9^{n+1} - 3$.

La relation est vraie au rang $n+1$.

Conclusion : la relation est vraie au rang 0 et si elle est vraie $n \in \mathbb{N}$ elle l'est aussi au rang $n+1$.

D'après le principe de récurrence :

$$u_n = 2 \times 0,9^n - 3,\ n \in \mathbb{N}.$$

b. On sait que $0 < 0,9 < 1$ implique que $0 < 0,9^n \leqslant 1$ puis en multipliant par $2 > 0$,
$0 < 2 \times 0,9^n \leqslant 2$ et enfin en ajoutant à chaque membre le nombre -3 :
$-3 < 0,9^n - 3 \leqslant -1$, soit $-3 < u_n \leqslant -1$.

c. Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 0,9u_n - 0,3 - u_n = -0,1u_n - 0,3$.
Or l'encadrement trouvé précédemment $-3 < u_n < -1$ donne par produit par $-0,1$,
$0,1 < -0,1u_n < 0,3$ et en retranchant $0,3$, $-0,2 - 0,1u_n - 0,3 < 0$.
Conclusion : quel que soit le naturel n, $u_{n+1} - u_n < 0$: la suite (u_n) est donc décroissante.

d. La suite (u_n) décroissante et minorée par -3 converge vers une limite ℓ, avec $\ell \geqslant -3$.
D'autre part de l'égalité $u_n = 2 \times 0,9^n - 3$, sachant que $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,9^n = 0$, on déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -3$. La suite (u_n) converge vers -3.

2. On se propose d'étudier la fonction g définie sur $]-3\ ;\ -1]$ par :

$$g(x) = \ln(0,5x + 1,5) - x.$$

a. Justifications :

- $-3 < x \leqslant -1 \Rightarrow -1,5 < 0,5x \leqslant -0,5 \Rightarrow 0 < 0,5x + 1,5 \leqslant 1$. Donc la fonction est définie sur $]-3\ ;\ -1]$
- La fonction g est dérivable sur $]-3\ ;\ -1]$ et sur cet intervalle :

$g'(x) = \dfrac{0,5}{0,5x+1,5} - 1 = \dfrac{0,5 - 0,5x - 1,5}{0,5x+1,5} = \dfrac{-0,5x-1}{0,5x+1,5}$.
On a vu ci-dessus que $0,5x + 1,5 > 0$, le signe de $g'(x)$ est donc celui de $-0,5x - 1$:

- $g'(x) = 0 \iff -0,5x - 1 = 0 \iff -1 = 0,5x \iff -2 = x$;
- $g'(x) > 0 \iff -0,5x - 1 > 0 \iff -1 > 0,5x \iff -2 > x$;
- $g'(x) < 0 \iff -0,5x - 1 < 0 \iff -1 < 0,5x \iff -2 < x$;

Conclusion : la fonction est croissante sur $]-3\ ;\ -2]$ et décroissante sur $[-2\ ;\ -1]$.

- On a $\lim\limits_{x\to-3} \ln(0,5x + 1,5) = -\infty$, d'où $\lim\limits_{x\to-3} g(x) = -\infty$
- $g(-1) = \ln(-0,5 + 1,5) - (-1) = 0 + 1 = 1$;
- $g(-2) = \ln(-1 + 1,5) - (-2) = 2 + \ln 0,5 = 2 + \ln \dfrac{1}{2} = 2 - \ln 2 \approx 1,31$.

b. D'après le théorème des valeurs intermédiaires sur l'intervalle $]-3\ ;\ -2]$, la fonction g est strictement croissante de moins l'infini à $g(-2) > 0$ et est continue sur cet intervalle : il existe donc un réel unique
$\alpha \in]-3\ ;\ -2]$ tel que $f(\alpha) = 0$.
La calculatrice donne :
$g(-2,9) \approx -0,957$ et $g(-2,8) \approx 0,4974$, d'où $-2,9 < \alpha < -2,8$;
$g(-2,89) \approx -0,01$ et $g(-2,88) \approx 0,067$, d'où $-2,89 < \alpha < -2,88$;
$g(-2,889) \approx -0,002$ et $g(-2,888) \approx 0,006$, d'où $-2,889 < \alpha < -2,888$.

3. **a.** Que que soit $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \ln(0,5u_n + 1,5)$ et en utilisant la formule du **1. a.**, $v_n = \ln(0,5(2 \times 0,9^n - 3) + 1,5) = \ln(0,9^n - 1,5 + 1,5) = \ln 0,9^n = n \ln 0,9$.
L'égalité $v_n = n \ln 0,9$, montre que la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison $\ln 0,9$.

b. On a $u_n = v_n \iff u_n = \ln(0,5u_n + 1,5) \iff \ln(0,5u_n + 1,5) - u_n = 0 \iff g(u_n) = 0$.

c. On a donc $g(u_n) = 0 \iff u_n = \alpha$, soit $2 \times 0,9^n - 3 = \alpha$.
Or on a vu que $-2,889 < \alpha < -2,888$: on en déduit que $-2,889 < 2 \times 0,9^n - 3 < -2,888$, soit en ajoutant 3 :
$0,111 < 2 \times 0,9^n < 0,112 \iff 0,0555 < 0,9^n < 0,0556$ soit par croissance du logarithme népérien $\ln 0,0555 < n \ln 0,9 < \ln 0,0556$ et enfin $\dfrac{\ln 0,0556}{\ln 0,9} < n < \dfrac{\ln 0,0555}{\ln 0,9}$ (car $\ln 0,9 < 0$).
Or $\dfrac{\ln 0,0556}{\ln 0,9} \approx 27,4$ et $\dfrac{\ln 0,0555}{\ln 0,9} \approx 27,5$.
On aurait donc un entier n tel que $27,4 < n < 27,5$. Donc n ne peut être un naturel.
Conclusion : il n'existe pas k tel que $u_k = \alpha$.

d. On a vu que $u_n = \alpha \iff g(u_n) = 0 \iff u_n = v_n$. On vient de voir que ceci n'est pas possible : il n'existe pas $k \in \mathbb{N}$ tel que $v_k = u_k$.

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.