Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour consulter tous nos sujets d'annales et corrigés du Bac Général Maths + SES, veuillez visiter :
bac-maths-ses.fr/annales-sujets-et-corriges

Corrigé du baccalauréat Métropole 11 mai 2022

Sujet 1

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Le sujet propose 4 exercices
Le candidat choisit 3 exercices parmi les 4 et **ne doit traiter que ces 3 exercices**

EXERCICE 1 (7 points) **Thèmes : fonctions et suites**

Partie A

1. **a.** La fonction f est continue et dérivable sur $[0\ ;\ 10]$. En utilisant les règles de dérivation d'un produit, on obtient :
$f'(t) = 3\mathrm{e}^{-0,5t+1} + 3t \times -0,5\mathrm{e}^{0,5t+1} = \mathrm{e}^{-0,5t+1}(+-3(0,5t+1)) = (-1,5t+3)\mathrm{e}^{-0,5t+1}$
Donc $\forall t \in [0\ ;\ 10]$, $f'(t) = 3(-0,5t+1)\mathrm{e}^{-0,5t+1}$

b. $\forall t \in [0\ ;\ 10]$, $\mathrm{e}^{-0,5t+1} > 0$ donc $f'(t)$ a le même signe que $-0,5t+1$.
$-0,5t+1 \geqslant 0 \iff x \leqslant 2$.
Dans le tableau : $f(0) = 0$, $f(2) = 6\mathrm{e}^0 = 6$ et $f(10) = 30\mathrm{e}^{-5+1} = 30\mathrm{e}^{-4}$.
D'où le tableau de variation de f :

x	0		2		10
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	0	↗	6	↘	$30\mathrm{e}^{-4}$

c. Le maximum de la fonction f est atteint pour $t = 2$, et $f(2) = 6$. La dose maximale de 6 mg sera atteinte au bout de 2 heures.

2. **a.** Sur l'intervalle $[0\ ;\ 2]$, la fonction f est continue et strictement croissante à valeurs dans $[0\ ;\ 6]$. Or $5 \in [0\ ;\ 6]$, donc d'après le corollaire du TVI (théorème des valeurs intermédiaires), l'équation $f(t) = 5$ admet une unique solution, notée α, dans l'intervalle $[0\ ;\ 2]$.
À la calculatrice, $\alpha \approx 1,02$.

b. D'après le tableau de variations, $f(t) \geqslant 5 \iff t \in [\alpha\ ;\ \beta]$. De plus $\beta - \alpha = 2,44$ (heures).
Donc le traitement sera efficace pendant 2,44 heures soit environ 146 minutes.

Partie A

1. Au bout d'une heure, la quantité de médicament dans le sang diminue de 30 %, donc il en reste 70 %. Puis on en injecte à nouveau 1,8 mg. Sachant que $u_0 = 2$, alors $u_1 = 0,70 \times 2 + 1,8 = 3,2$. Au bout d'une heure, la quantité de médicament dans le sang sera de 3,2 mg.

2. Soi $n \in \mathbb{N}$. u_n désigne la quantité de médicament dans le sang au bout de n heures. Une heure plus tard, il ne restera que 70 % de la quantité précédente (70 % de u_n), puis on en ajoute 1,8 mg par injection.
Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0,7 \times u_n + 1,8$.

3. **a.** Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1} < 6$.
Initialisation : $u_0 = 2$ et $u_1 = 3,2$. Donc $u_0 \leqslant u_1 < 6$. L'initialisation est vérifiée.
Hérédité : on suppose que si $n \in \mathbb{N}$, alors $u_n \leqslant u_{n+1} < 6$.
Montrons que $u_{n+1} \leqslant u_{n+2} < 6$.
$u_n \leqslant u_{n+1} < 6 \iff 0,7 \times u_n \leqslant 0,7 \times u_{n+1} < 0,7 \times 6 \iff 0,7u_n \leqslant 0,7u_{n+1} < 4,2$ donc $0,7u_n + 1,8 \leqslant 0,7u_{n+1} + 1,8 < 4,2 + 1,8 \iff 0,7u_n + 1,8 \leqslant 0,7u_{n+1} + 1,8 < 6$.
Donc $u_{n+1} \leqslant u_{n+2} < 6$. L'hérédité est démontrée.
Conclusion : La proposition est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang n, elle l'est aussi au rang $n+1$.
D'après l'axiome de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1} < 6$.

b. Nous venons de montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1} < 6$. Cela signifie que la suite (u_n) est croissante et majorée par 6. Donc d'après le théorème de convergence monotone, la suite (u_n) converge vers une limite finie notée ℓ.

c. La suite (u_n) converge vers ℓ donc ℓ est l'unique solution de l'équation $\ell = 0,7\ell + 1,8$ (théorème du point fixe).
$l = 0,7l + 1,8 \iff 0,3l = 1,8 \iff l = 6$. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 6$

4. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = -u_n + 6$.

a. $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = -u_{n+1} + 6 = -(0,7 \times u_n + 1,8) + 6 = -0,7u_n + 4,2 = 0,7\left(-u_n + \dfrac{4,2}{0,7}\right)$
$= 0,7(-u_n + 6) = 0,7v_n$.
Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 0,7n_n$ donc la suite (v_n) est géométrique de raison 0,7 et de premier terme $v_0 = -u_0 + 6 = 4$.

b. $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times q^n = 4 \times 0,7^n$.
De plus $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = -u_n + 6$ donc $u_n = -v_n + 6 = 6 - 4 \times 0,7^n$.

c. $u_n \geqslant 5,5 \iff 6 - 4 \times 0,7^n \geqslant 5,5 \iff -4 \times 0,7^n \geqslant -0,5 \iff 0,7^n \leqslant \dfrac{-0,5}{-4}$
$\iff \ln(0,7^n) \leqslant \ln\left(\dfrac{1}{8}\right) \iff n \times \ln(0,7) \leqslant -\ln(8) \iff n \geqslant -\dfrac{\ln(8)}{\ln(0,7)}$ car $\ln(0,7) < 0$
Donc $n \geqslant -\dfrac{2\ln(2)}{\ln(0,7)}$. À la calculatrice : $-\dfrac{2\ln(2)}{\ln(0,7)} \approx 5,83$ donc $n \geqslant 6$.
Cela signifie que $u_6 \geqslant 5,5$. Il faudra donc au total 7 injections (de l'injection initiale u_0 à la 7e qui correspond à u_6).

EXERCICE 2 (7 points) **Thème : géométrie dans l'espace.**

1. **a.** La droite $\mathscr{D}$ dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 2 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$.

b. Si B appartient à la droite $\mathscr{D}$ alors $\exists t \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\begin{cases} -1 &= 1+2t \\ 3 &= 2-t \\ 0 &= 2+2t \end{cases} \iff \begin{cases} 2t &= -2 \\ -t &= 1 \\ 2t &= -2t \end{cases} \iff t=-1. \text{ Donc } B \in \mathscr{D}.$$

c. On a $A(-1\ ;\ 1\ ;\ 3)$ et $B(-1\ ;\ 3\ ;\ 0)$. Donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\2\\-3\end{pmatrix}$.

Alors $\overrightarrow{AB}.\vec{u} = 0\times 2 + 2\times(-1) + (-3)\times 2 = -8$

2. **a.** Le plan $\mathscr{P}$ passant par A est orthogonal à la droite $\mathscr{D}$. Donc $\mathscr{P}$ a pour vecteur normal le vecteur $\vec{u}$ (vecteur directeur de $\mathscr{D}$).

Son équation cartésienne sera de la forme $ax+by+cz+d=0$, où $(a\ ;\ b\ ;\ c)$ sont les cordonnées d'un vecteur normal au plan.

En prenant comme vecteur normal à $\mathscr{P}$ le vecteur $\vec{u}$, on obtient : $\mathscr{P}$:

$2x-y+2z+d=0$. Or $A \in \mathscr{P}$ donc $-2-1+6+d=0$ donc $d=-3$. Donc $\mathscr{P}$ a pour équation $2x-y+2z-3=0$

b. Le projeté orthogonal de A sur la droite $\mathscr{D}$, noté H, est l'unique point d'intersection de $\mathscr{P}$ et $\mathscr{D}$. Résolvons donc le système suivant :

$\begin{cases} 2x-y+2z-3 &= 0 \\ x &= 1+2t \\ y &= 2-t \\ z &= 2+2t \end{cases}$. On remplace x, y et z dans la première équation :

$2x-y+2z-3=0 \iff 2(1+2t)-(2-t)+2(2+2t)-3=0 \iff$

$2+4t-2+t+4+4t=0 \iff 9t+1=0 \iff t=-\dfrac{1}{9}$.

On remplace la valeur de t dans les trois dernières équations :

$\begin{cases} x &= 1+2\times -\dfrac{1}{9} = \dfrac{7}{9} \\ y &= 2-\left(-\dfrac{1}{9}\right) = \dfrac{19}{9} \\ z &= 2+2\times\left(-\dfrac{1}{9}\right) = \dfrac{16}{9} \end{cases}$. Donc $H\left(\dfrac{7}{9}\ ;\ \dfrac{19}{9}\ ;\ \dfrac{16}{9}\right)$.

c. Déterminons les coordonnées de $\overrightarrow{AH}$ avec $A(-1\ ;\ 1\ ;\ 3)$ et $H\left(\dfrac{7}{9}\ ;\ \dfrac{19}{9}\ ;\ \dfrac{16}{9}\right)$:

$\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}\frac{16}{9}\\ \frac{10}{9}\\ -\frac{11}{9}\end{pmatrix}$.

Donc $\left\|\overrightarrow{AH}\right\| = \sqrt{\left(\dfrac{16}{9}\right)^2+\left(\dfrac{10}{9}\right)^2+\left(-\dfrac{11}{9}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{477}}{9} = \dfrac{\sqrt{53}}{3}$

3. **a.** Les points H et B appartiennent à $\mathscr{D}$, donc le vecteur $\overrightarrow{HB}$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$, tout comme $\vec{u}$. Donc les vecteurs $\overrightarrow{HB}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires donc $\exists k \in \mathbb{R}$ tel que
$\overrightarrow{HB} = k \times \vec{u}$.

b. D'après les propriétés du produit scalaire, et en utilisant la relation de Chasles, $\overrightarrow{AB}.\vec{u} = \left(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB}\right).\vec{u} = \overrightarrow{AH}.\vec{u} + \overrightarrow{HB}.\vec{u}$.

Or les points A et H appartiennent au plan $\mathscr{P}$ normal à la droite $\mathscr{D}$, donc tout vecteur de $\mathscr{P}$ est orthogonal à tout vecteur de $\mathscr{D}$ donc $\overrightarrow{AH} \perp \vec{u}$ donc $\overrightarrow{AH}.\vec{u} = 0$.

Donc $\overrightarrow{AB}.\vec{u} = \overrightarrow{HB}.\vec{u} = k \times \vec{u}.\vec{u} = k\,\vec{u}^2 = k \|\vec{u}\|^2$ donc $k = \dfrac{\overrightarrow{AB}.\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}$.

c. On a $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ donc $\|\vec{u}\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$ et $\overrightarrow{AB}.\vec{u} = -8$ donc
$k = \dfrac{-8}{3^2} = -\dfrac{8}{9}$.

Donc en posant $H(x\,;\,y\,;\,z)$ et $B(-1\,;\,3\,;\,0)$ alors $\overrightarrow{HB}\begin{pmatrix} -1-x \\ 3-y \\ -z \end{pmatrix}$.

De plus $\overrightarrow{HB} = k \times \vec{u} = -\dfrac{8}{9} \times \vec{u}$ donc $\begin{cases} -1-x &= -\dfrac{8}{9} \times 2 \\ 3-y &= -\dfrac{8}{9} \times (-1) \\ -z &= -\dfrac{8}{9} \times 2 \end{cases}$

Donc $x = \dfrac{16}{9} - 1 = \dfrac{7}{9}$, $y = 3 - \dfrac{8}{9} = \dfrac{19}{9}$ et $z = \dfrac{16}{9}$. On retrouve les coordonnées du point H.

4. Les points A, H et C appartiennent au plan $\mathscr{P}$. H est le projeté orthogonal de B sur $\mathscr{P}$. Le tétraèdre $BAHC$ a pour base le triangle AHC et pour hauteur BH.

Donc $\mathscr{V}_{BAHC} = \dfrac{1}{3} \times \mathscr{A}_{AHC} \times BH$ d'où $\mathscr{A}_{AHC} = \dfrac{3 \times \mathscr{V}_{BAHC}}{BH}$.

D'après la question **3. c**, $\overrightarrow{HB} = k \times \vec{u} =$ donc $\overrightarrow{HB}\begin{pmatrix} \frac{16}{9} \\ -\frac{8}{9} \\ \frac{16}{9} \end{pmatrix}$ donc

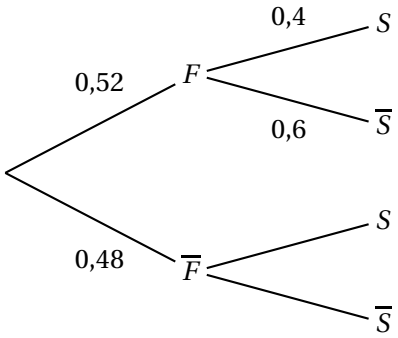
$HB = \sqrt{\left(\dfrac{16}{9}\right)^2 + \left(-\dfrac{8}{9}\right)^2 + \left(\dfrac{16}{9}\right)^2} = \dfrac{8}{3}$

Donc $\mathscr{A}_{AHC} = \dfrac{3 \times \dfrac{8}{9}}{\dfrac{8}{3}} = 1$ unité d'aire.

EXERCICE 3 (7 points) **Thèmes : probabilité, loi binomiale.**

1. **a.** L'énoncé nous indique que ce stage a été suivi par 25 % des salariés. Donc $p(S) = 0,25$.

b. L'arbre complété avec les valeurs disponibles :



c. On calcule $p(F \cap S)$: $p(F \cap S) = p_S(F) \times p(S) = 0,4 \times 0,52 = 0,208$

d. On cherche calculer $p_S(F)$. D'après la formule de Bayes,
$p_S(F) = \dfrac{p(F \cap S)}{p(S)} = \dfrac{0,208}{0,25} = 0,832$

e. Appliquons la formule des probabilités totales : $p(S) = p(S \cap F) + p(S \cap \overline{F})$.
Donc $p\left(S \cap \overline{F}\right) = p(S) - p(S \cap F) = 0,25 - 0,208 = 0,042$.

Avec la formule de Bayes : $p_{\overline{F}}(S) = \dfrac{p\left(S \cap \overline{F}\right)}{p\left(\overline{F}\right)} = \dfrac{0,042}{0,48} = 0,087\,5 < 0,1$.

L'affirmation du directeur est donc exacte.

2. **a.** Il s'agit là d'un schéma de Bernoulli : la répétition de 20 expériences aléatoires n'ayant que deux issues, identiques et indépendantes entre elles. X est la variable aléatoire qui compte les succès. X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,25$: $X \sim \mathscr{B}(20\ ;\ 0,25)$

b. $p(X = 5) = \dbinom{20}{5} \times 0,25^5 \times (1 - 0,25)^{20-5} \approx 0,202$.

La probabilité qu'exactement 5 salariés suivent le stage est d'environ 0,202.

c. « proba(5) » calcule pour k allant de 0 à 5, la somme des probabilités $p(X = k)$,
Soit $p(X \leqslant 5)$. À la calculatrice, $p(X \leqslant 5) \approx 0,617$.
Cela signifie que la probabilité qu'au plus 5 salariés aient effectué le stage, est égale à 0,617.

La probabilité qu'au moins 6 salariés suivent le stage est d'environ 0,617.

d. $p(X \geqslant 6) = 1 - p(X < 6) = 1 - p(X \leqslant 5) \approx 1 - 0,617 \approx 0,383$

3. • Premier exemple : supposons qu'il y ait 25 salariés à 1 000 € et 75 à 1 200 €, les premiers ayant fait le stage.

Le salaire moyen est égal à $\dfrac{25 \times 1\,000 + 75 \times 1\,200}{100} = 1\,150$ €.

Après augmentation le salaire moyen passe à :
$\dfrac{25 \times 1\,000 \times 1,05 + 75 \times 1\,200 \times 1,02}{100} = 1\,180,50$ €.

L'augmentation moyenne est donc égale à $\dfrac{1\,180,5}{1\,150} \approx 1,026\,5$, soit une augmentation d'environ 2,65 %.

• Deuxième exemple : supposons qu'il y ait 25 salariés à 1 200 € et 75 à 1 000 €, les premiers ayant fait le stage.

Le salaire moyen est égal à $\dfrac{25\times 1\,200+75\times 1\,000}{100}=1\,050$ €.

Après augmentation le salaire moyen passe à :

$\dfrac{25\times 1\,200\times 1,05+75\times 1\,000\times 1,02}{100}=1\,080$ €.

L'augmentation moyenne est donc égale à $\dfrac{1\,080}{1\,050}\approx 1,0285$, soit une augmentation d'environ 2,85 %.

Conclusion : l'augmentation moyenne dépend de la répartition des salaires : on ne peut pas répondre à cette question.

EXERCICE 4 (7 points) **Thèmes : fonctions, convexité, limites.**

1. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{-2x^2+3x-1}{x^2+1}$.

Pour $x\neq 0$, $f(x)=\dfrac{x^2\left(-2+\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}=\dfrac{-2+\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{1}{x^2}}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-2$.

Donc la droite horizontale d'équation $y=-2$ est une asymptote à la courbe représentative de la fonction f. **Réponse c**

2. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ donc admet des primitives. Soit F une primitive de f.

$\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)$ est de la forme $u'(x)\times \mathrm{e}^{u(x)}$, et admet pour primitives les fonctions $x\mapsto \mathrm{e}^{u(x)}+k$, $k\in\mathbb{R}$.

En posant $u(x)=x^2$ et $u'(x)=2x$, et en remarquant que $f(x)=\dfrac{1}{2}\times 2x\,\mathrm{e}^{x^2}$, on peut donc écrire :

$\forall x\in\mathbb{R}$, $F(x)=\dfrac{1}{2}\times \mathrm{e}^{x^2}+k$.

Sachant que $F(0)=1$ on en déduit que : $\dfrac{1}{2}+k=1$ donc $k=\dfrac{1}{2}$.

Donc $\forall x\in\mathbb{R}$, $F(x)=\dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{x^2}+\dfrac{1}{2}$ **Réponse d**

3. La courbe représentative est celle de la fonction f'. Avec la précision permise par le graphique, on peut affirmer que la fonction f' est croissante sur $]-\infty\,;\,3]$ et décroissante sur $[3\,;\,+\infty[$. $[0\,;\,2]\subset]-\infty\,;\,3]$, donc f' est croissante $[0\,;\,2]$.
La fonction est donc convexe sur $[0\,;\,2]$. **Réponse c**

4. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3\mathrm{e}^{-x^2}+2$ est continue et dérivable. $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)>0$.

Les primitives de la fonction f, ont pour dérivée f, qui est positive sur $\mathbb{R}$.

Donc les fonctions F sont croissantes sur $\mathbb{R}$. **Réponse a**

5. $\forall x \in]0\,;\,+\infty[,\ f(x) = \dfrac{2\ln(x)}{3x^2+1} = \dfrac{2}{3}\dfrac{x^2 \times \dfrac{\ln(x)}{x^2}}{x^2\left(1+\dfrac{1}{3x^2}\right)} = \dfrac{2}{3}\dfrac{\dfrac{\ln(x)}{x^2}}{1+\dfrac{1}{3x^2}}$.

Nous savons que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^2} = 0$ (croissances comparées) et $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\dfrac{1}{3x^2} = 1$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ **Réponse d**

6. $\forall x \in \mathbb{R}$, (E) $\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^x - 12 = 0 \iff (\mathrm{e}^x)^2 + \mathrm{e}^x - 12 = 0$.

On pose comme changement de variable : $X = \mathrm{e}^x$: $(E) \iff X^2 + X - 12 = 0$. Cette équation a pour solutions $X = -4$ et $X = 3$.

Or $X = \mathrm{e}^x > 0$ donc l'unique solution sera celle de l'équation $X = \mathrm{e}^x = 3 \iff x = \ln(3)$. **Réponse c**

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.