Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour consulter tous nos sujets d'annales et corrigés du Bac Général Maths + SES, veuillez visiter :
bac-maths-ses.fr/annales-sujets-et-corriges

∽ Corrigé du baccalauréat spécialité Jour 1 ∾
Métropole Antilles-Guyane 8 septembre 2022

Exercice 1 7 points **Thèmes : fonctions, suites**

1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \frac{2\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}.$$

On a pour tout réel x, $g(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x \times 2}{\mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^{-x})} = \dfrac{2}{1+\mathrm{e}^{-x}}$.

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\mathrm{e}^{-x} = 1$ et enfin $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \dfrac{2}{1} = 2$. Réponse **b.**

2. La dérivée seconde f'' est positive sur les intervalles $]-\infty\,;\,-1[$ et $[2\,;\,+\infty[$, donc la fonction f est convexe sur ces intervalles. Réponse **c.**

3. On a pour tout naturel n :

$b_{n+1} = a_{n+1} - 2 = 0{,}5a_n + 1 - 2 = 0{,}5a_n - 1 = 0{,}5(a_n - 2) = 0{,}5b_n$.

L'égalité $b_{n+1} = 0{,}5b_n$ montre que la suite (b_n) est une suite géométrique de raison 0,5.

Réponse **d.**

4. • Comme $-1 < \dfrac{1}{4} < 1$, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{4}\right)^n = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \left(\dfrac{1}{4}\right)^n = 1$;

• On a $\dfrac{n}{n+1} = \dfrac{1}{1+\frac{1}{n}}$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 2 - \dfrac{n}{n+1} = 1$.

On a donc $1 + \left(\dfrac{1}{4}\right)^n \leqslant u_n \leqslant 2 - \dfrac{n}{n+1}$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \left(\dfrac{1}{4}\right)^n = \lim\limits_{n\to+\infty} 2 - \dfrac{n}{n+1} = 1$.

D'après le théorème des gendarmes, on peut dire que la suite (u_n) est convergente et que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$. Réponse **b.**

5. Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = x^2 \ln x$.

Si $F(x) = \dfrac{1}{3}x^3\left(\ln x - \dfrac{1}{3}\right)$, alors $F'(x) = x^2\left(\ln x - \dfrac{1}{3}\right) + \dfrac{1}{3}x^3 \times \dfrac{1}{x} = x^2 \ln x - \dfrac{1}{3}x^2 + \dfrac{1}{3}x^2 = x^2 \ln x = f(x)$. Réponse **a.**

6. $2 + \dfrac{3\mathrm{e}^{-x} - 5}{\mathrm{e}^{-x} + 1} = \dfrac{2\mathrm{e}^{-x} + 2 + 3\mathrm{e}^{-x} - 5}{\mathrm{e}^{-x} + 1} = \dfrac{5\mathrm{e}^{-x} - 3}{\mathrm{e}^{-x} + 1}$; en multipliant chaque terme par e^x, on obtient : $\dfrac{5 - 3\mathrm{e}^x}{1 + \mathrm{e}^x}$. Réponse **a.**

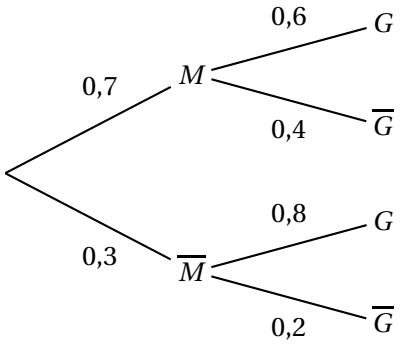
Exercice 2 7 points **Thème probabilités**

1. **a.** On a $p(M) = 0{,}7$, donc $p\left(\overline{M}\right) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$.

Or $p\left(\overline{M} \cap \overline{G}\right) = 0{,}06$ donc

$p\left(\overline{M}\right) \times p_{\overline{M}}\left(\overline{G}\right) = 0{,}06 \iff 0{,}3 \times p_{\overline{M}}\left(\overline{G}\right) = 0{,}06 \iff p_{\overline{M}}\left(\overline{G}\right) = 0{,}2.$

b. On complète l'arbre pondéré :



c. La probabilité de l'évènement « le client visite la grotte et ne visite pas le musée » est : $p\left(\overline{M}\cap G\right) = p\left(\overline{M}\right) \times p_{\overline{M}}(M) = 0{,}3 \times 0{,}8 = 0{,}24$.

d. On a de même $p(M\cap G) = p(M) \times p_M(G) = 0{,}7 \times 0{,}6 = 0{,}42$.

D'après la loi des probabilités totales :

$p(G) = p(M\cap G) + p\left(\overline{M}\cap G\right) = 0{,}42 + 0{,}24 = 0{,}66$.

2. Le responsable de l'hôtel affirme que parmi les clients qui visitent la grotte, plus de la moitié visitent également le musée.

On calcule $p_G(M) = \dfrac{p(G\cap M}{p(G)} = \dfrac{p(M\cap G}{p(G)} = \dfrac{0{,}42}{0{,}66} = \dfrac{42}{66} = \dfrac{21}{33} = \dfrac{7}{11} \approx 0{,}64 > 0{,}5$.

L'affirmation est exacte.

3. **a.** On a le tableau de probabilités suivant :

évènement	$M\cap G$	$M\cap\overline{G}$	$\overline{M}\cap G$	$\overline{M}\cap\overline{G}$
probabilité	0,42	0,28	0,24	0,06
dépense	17	12	5	0

b. D'après le tableau précédent :

$E(T) = 17 \times 0{,}42 + 12 \times 0{,}28 + 5 \times 0{,}24 + 0 \times 0{,}06 = 7{,}14 + 3{,}36 + 1{,}2 = 11{,}7$.

Ceci signifie que sur un grand nombre de visiteurs la dépense moyenne par visiteur est égale à 11,70 €.

c. Soit x le nombre minimum de visiteurs , x doit vérifier :

$11{,}7 \times x > 700 \iff x > \dfrac{700}{11{,}7}$. Or $\dfrac{700}{11{,}7} \approx 59{,}8$.

Il faut donc qu'il y ait au moins 60 visiteurs.

4. Soit g le prix à payer pour visiter la grotte ; le tableau de probabilités devient :

évènement	$M\cap G$	$M\cap\overline{G}$	$\overline{M}\cap G$	$\overline{M}\cap\overline{G}$
probabilité	0,42	0,28	0,24	0,06
dépense	12 + g	12	g	0

L'espérance devient :

$E = 0{,}42(12+g) + 12 \times 0{,}28 + 0{,}24 \times g + 0 \times 0{,}06 = 5{,}04 + 0{,}42g + 3{,}36 + 0{,}24g = 8{,}4 + 0{,}66g$.

Le responsable veut que :

$8{,}4 + 0{,}66g = 15 \iff 0{,}66g = 6{,}6 \iff g = 10$.

Le prix d'entrée à la grotte doit passer à 10 euros.

5. Le nombre de visiteurs étant suffisamment grand pour que le tirage puisse être considéré avec remise, chaque visiteur a donc en moyenne une probabilité de 0,66 de visiter la grotte.

La variable aléatoire G égale au nombre de visiteurs de la grotte suit donc une loi binomiale $\mathscr{B}(100\ ;\ 0{,}66)$.

Il faut donc trouver $p(G \geqslant 75)$.

La calculatrice donne $p(G \leqslant 74) \approx 0{,}966\,0$, donc

$p(G \geqslant 75) = 1 - p(G \leqslant 74) \approx 1 - 0{,}966\,0 \approx 0{,}034$ au millième près.

Exercice 3 7 points **Thème fonctions logarithmes et exponentielles, suites**

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\ln x}{x},$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.

1. On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

L'axe des abscisses est asymptote horizontale au graphe de la fonction f au voisinage de plus l'infini.

2. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

a. En dérivant $f(x)$ comme un quotient, on obtient pour $x \geqslant 1$:

$$f'(x) = \frac{\dfrac{1}{x} \times x - 1 \times \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

b. Quel que soit x, $x^2 \geqslant 0$, le signe de $f'(x)$ est donc celui du numérateur $1 - \ln x$:

- $1 - \ln x > 0 \iff 1 > \ln x \iff \text{e} > x$: $f'(x) > 0$ sur l'intervalle $[1\ ;\ \text{e}]$;
- $1 - \ln x < 0 \iff 1 < \ln x \iff \text{e} < x$: $f'(x) < 0$ sur l'intervalle $[\text{e}\ ;\ +\infty[$.
- $1 - \ln x = 0 \iff 1 = \ln x \iff \text{e} = x$.

On a donc le tableau de signes de $f'(x)$:

x	1		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

c. $f(1) = 0$ et $f(\text{e}) = \dfrac{1}{\text{e}}$; on dresse le tableau de variations de la fonction f sur $[1\ ;\ +\infty[$.

x	1		e		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	0	↗	$\frac{1}{\mathrm{e}}$	↘	0

3. **a.** D'après le tableau de variations sur l'intervalle [1 ; e], la fonction est strictement croissante de 0 à $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$: l'équation $f(x) = k$ avec $0 \leqslant k \leqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ a donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires une solution unique.

b. D'après le tableau de variations $f(x) \leqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ (maximum de f) : l'équation $f(x) = k$ avec $k > \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ n'a donc pas de solution

Partie B

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \mathrm{e}^{\frac{x}{4}}$.
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n :
$u_{n+1} = \mathrm{e}^{\frac{u_n}{4}}$ c'est-à-dire : $u_{n+1} = g(u_n)$.

1. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle :
$g'(x) = \dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{\frac{x}{4}}$: produit de deux facteurs supérieurs à zéro, cette dérivée est supérieure à zéro, donc g est croissante sur $\mathbb{R}$.

2. Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \mathrm{e}$.

- *Initialisation*
  $u_0 = 1$ et $u_1 = \mathrm{e}^{u_0} = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$. On a bien : $u_0 \leqslant u_1 \leqslant \mathrm{e}$; la propriété est vraie pour $n = 0$.
- *Hérédité*
  Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, on ait $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \mathrm{e}$.
  Par croissance de la fonction g, on a : $g(u_n) \leqslant g(u_{n+1}) \leqslant g(\mathrm{e})$ soit
  $u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant g(\mathrm{e})$
  Or $g(\mathrm{e}) = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{e}}{4}} \approx 1{,}97$; donc $g(\mathrm{e}) \leqslant \mathrm{e}$ et l'encadrement précédent devient :
  $u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant \mathrm{e}$: la propriété est vraie au rang $n+1$.
- *Conclusion*
  L'encadrement est vrai au rang 0 et s'il est vrai au rang $n \in \mathbb{N}$, il est vrai au rang $n+1$; d'après le principe de récurrence : quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \mathrm{e}$.

3. L'encadrement précédent montre :

— que la suite (u_n) est croissante ;
— que la suite (u_n) est majorée par e.

Donc, d'après le théorème de la convergence monotone, la suite (u_n) est convergente vers une limite inférieure ou égale à e.

On note ℓ la limite de la suite (u_n) et on admet que ℓ est solution de l'équation : $\mathrm{e}^{\frac{x}{4}} = x$.

4. Quel que soit $x>0$, $e^{\frac{x}{4}}=x \iff \dfrac{x}{4}=\ln x$, par croissance de la fonction ln.

Or $\dfrac{x}{4}=\ln x \iff \dfrac{1}{4}=\dfrac{\ln x}{x}$, soit finalement : $f(x)=\dfrac{1}{4}$ avec f fonction définie dans la partie A.

5. On a : $e<4$ donc $\dfrac{1}{4}<\dfrac{1}{e}$ donc $0\leqslant\dfrac{1}{4}\leqslant\dfrac{1}{e}$.

D'après la question **3. a.** de la partie A, l'équation $f(x)=\dfrac{1}{4}$ a donc une solution unique sur l'intervalle $[1\,;\,e]$.

La calculatrice donne : $f(1)=0$ et $f(2)=\dfrac{\ln 2}{2}\approx 0{,}346$;

$f(1{,}4)\approx 0{,}24$ et $f(1{,}5)\approx 0{,}27$, donc $1{,}4<\ell<1{,}5$;

$f(1{,}42)\approx 0{,}247$ et $f(1{,}43)\approx 0{,}251$, donc $1{,}42<\ell<1{,}43$;

$f(1{,}429)\approx 0{,}249\,8$ et $f(1{,}430)\approx 0{,}250\,1$, donc $1{,}429<\ell<1{,}430$;

Finalement $\ell\approx 1{,}43$ au centième près.

Exercice 4 7 points **Thème : géométrie dans l'espace**

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$, on considère les points

$$A(-1\,;\,-1\,;\,3),\qquad B(1\,;\,1\,;\,2),\qquad C(1\,;\,-1\,;\,7)$$

On considère également la droite Δ passant par les points $D(-1\,;\,6\,;\,8)$ et $E(11\,;\,-9\,;\,2)$.

1. **a.** Avec $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}12\\-15\\-6\end{pmatrix}$, on peut prendre comme vecteur directeur de Δ : $\dfrac{1}{3}\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}4\\-5\\-2\end{pmatrix}$.

On a $M(x\,;\,y\,;\,z)\in(DE) \iff$ il existe $t\in\mathbb{R}$, tel que $\overrightarrow{DM}=t\dfrac{1}{3}\overrightarrow{DE}$, soit

$$\begin{cases} x+1 &= 4t\\ y-6 &= -5t\\ z-8 &= -2t\end{cases}\quad\text{avec } t\in\mathbb{R} \iff \begin{cases} x &= -1+4t\\ y &= 6-5t\\ z &= 8-2t\end{cases}\quad\text{avec } t\in\mathbb{R}$$

b. La droite Δ' est parallèle à Δ donc elle a les mêmes vecteurs directeurs que Δ. De plus, elle passe par l'origine O du repère donc elle a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x &= 0+4t\\ y &= 0-5t\\ z &= 0-2t\end{cases}\quad\text{avec } t\in\mathbb{R}\text{ soit}\begin{cases} x &= 4t\\ y &= -5t\\ z &= -2t\end{cases}\quad\text{avec } t\in\mathbb{R}$$

c. $F(1{,}36\,;\,-1{,}7\,;\,-0{,}7)\in\Delta' \iff \begin{cases} 1{,}36 &= 4t\\ -1{,}7 &= -5t\\ -0{,}7 &= -2t\end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$

Les deux premières équations donnent $t=0{,}34$ et la dernière $t=0{,}35$.

Donc $F\notin\Delta$.

2. **a.** On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}$: ces deux vecteurs ne sont manifestement pas colinéaires, donc les trois points A, B et C définissent un plan.

b. On a $\frac{1}{3}\overrightarrow{\text{DE}}\cdot\overrightarrow{\text{AB}} = 8-10+2=0$;

De même $\frac{1}{3}\overrightarrow{\text{DE}}\cdot\overrightarrow{\text{AC}} = 8+0-8=0$.

Donc $\overrightarrow{\text{DE}}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) ; il est normal à ce plan.

c. D'après la question précédente on sait que :

$M(x\,;\,y\,;\,z) \in (\text{ABC}) \iff 4x-5y-2z+d=0$ avec $d\in\mathbb{R}$

Or A$(-1\,;\,-1\,;\,3) \in$ (ABC) donc $4\times(-1)-5\times(-1)-2\times 3+d=0$ avec $d\in\mathbb{R}$, soit $-5+d=0 \iff d=5$.

Conclusion : $M(x\,;\,y\,;\,z) \in (\text{ABC}) \iff 4x-5y-2z+5=0$.

3. **a.** $\text{G}(7\,;\,-4\,;\,4) \in \Delta \iff \begin{cases} 7 &= -1+4t \\ -4 &= 6-5t \\ 4 &= 8-2t \end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$

Ces trois équations ont pour solution $t=2$, donc G$(7\,;\,-4\,;\,4) \in \Delta$.

b. Le point H appartient à la droite Δ et au plan (ABC). Donc ses coordonnées x, y, z vérifient le système :

$$\begin{cases} x &= -1+4t \\ y &= 6-5t \\ z &= 8-2t \\ 4x-5y-2z+5 &= 0 \end{cases} \text{ avec } t\in\mathbb{R}$$

En replaçant x, y, z par leurs valeurs en fonction de t dans la dernière équation, on obtient :

$4(-1+4t)-5(6-5t)-2(8-2t)+5=0 \iff -4+16t-30+25t-16+4t+5=0 \iff 45t-45=0 \iff 45t=45 \iff t=1$.

Les coordonnées de H sont donc $(-1+4\,;\,6-5\,;\,8-2)$ soit H$(3\,;\,1\,;\,6)$.

c. La distance du point G au plan (ABC) est donc égale à GH.

Or $\text{GH}^2=(3-7)^2+(1+4)^2+(6-4)^2=16+25+4=45$, d'où

$\text{GH}=\sqrt{45}=\sqrt{9\times 5}=\sqrt{9}\sqrt{5}=3\sqrt{5}$.

4. **a.** D'après la question **2. a.**, on a $\overrightarrow{\text{AB}}\cdot\overrightarrow{\text{AC}}=2\times 2+2\times 0+4\times(-1)=4-4=0$: les vecteurs $\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{AC}}$ sont orthogonaux, donc les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires : le triangle ABC est rectangle en A.

b. En prenant comme base le triangle ABC, la hauteur correspondante est GH, donc :

$V=\frac{1}{3}\times\mathscr{A}(\text{ABC})\times\text{GH}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\text{AB}\times\text{AC}\times\text{GH}$.

On a $\text{AB}^2=2^2+2^2+(-1)^2=4+4+1=9$, donc AB $=3$;

$\text{AC}^2=2^2+0^2+4^2=4+16=20$, donc $\text{AC}=\sqrt{20}=\sqrt{4\times 5}=2\sqrt{5}$.

Donc $V=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 3\times 2\sqrt{5}\times 3\sqrt{5}=15$.

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.