Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour consulter tous nos sujets d'annales et corrigés du Bac Général Maths + SES, veuillez visiter :
bac-maths-ses.fr/annales-sujets-et-corriges

Baccalauréat général

Session 2022 – Amérique du Nord

Épreuve de Mathématiques

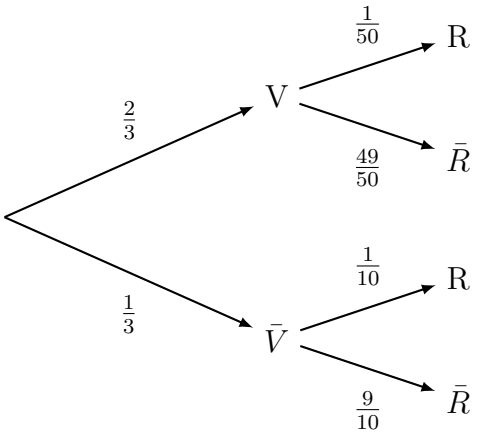
Sujet de spécialité n° 1 — Proposition de corrigé

Ce corrigé est composé de 9 pages.

Exercice 1 — Probabilités

1. Étude d'une journée quelconque.

a. On résume la situation avec un arbre pondéré :



b. On peut alors exploiter cet arbre pour trouver la probabilité qu'il rate son train, en appliquant la formule des probabilités totales :

$$P(R) = P(V \cap R) + P(\bar{V} \cap R)$$

Ou, en exprimant avec les probabilités conditionnelles :

$$\boxed{P(R) = P(V)P_V(R) + P(\bar{V})P_{\bar{V}}(R)}$$

D'où,

$$P(R) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{50} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{10} = \frac{7}{150}$$

Paul ratera donc bien son train avec une probabilité $\underline{P(R) = \frac{7}{150}}$.

c. On sait que Paul a raté son train, et on cherche la probabilité qu'il ait pris son vélo pour rejoindre la gare. Autrement dit, on cherche $P_R(V)$.
D'après le théorème de Bayes :

$$\boxed{P_R(V) = \frac{P(V \cap R)}{P(R)}}$$

D'où,

$$P_R(V) = \frac{\frac{2}{3} \times \frac{1}{50}}{\frac{7}{150}} = \frac{2}{7}$$

En ayant raté son train, Paul a donc pris le vélo pour se rendre à la gare avec une probabilité $\underline{P_R(V) = \frac{2}{7}}$.

2. Étude sur un mois quelconque.

a. On étudie le nombre de jours durant lesquels Paul s'est rendu à la gare à vélo. Autrement dit, on étudie la somme de l'expérience de Bernoulli « Paul emprunte son vélo » sur 20 jours.
La variable aléatoire X suit donc la loi Binomiale $\boxed{\mathscr{B}(n = 20, p = 2/3)}$.

b. La probabilité que Paul prenne son vélo pendant exactement 10 jours sur 20 vaut :

$$P(k=10) = \binom{20}{10} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{10} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{10} = 0,054$$

Paul aura donc pris son vélo exactement 10 jours sur 20 avec une probabilité $\underline{P(k=10) = 0,054}$.

c. La probabilité que Paul emprunte son vélo au moins 10 fois correspond simplement à la somme des probabilités qu'il l'emprunte de 10 à 20 fois. Alors :

$$\boxed{P(k \geq 10) = \sum_{i=10}^{20} \left(\binom{20}{i} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{i} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{20-i} \right)}$$

La machine nous donne aisément ce résultat, qui vaut donc :

$$\underline{P(k \geq 10) = 0,962}$$

probabilité que Paul utilise son vélo 10 fois ou plus.

d. On cherche le nombre moyen de jours pendant lesquels Paul emprunte son vélo, *i.e.* la valeur de l'espérance de la variable aléatoire X.
On a, pour $X \hookrightarrow \mathscr{B}(20, 2/3)$:

$$E(X) = 20 \times \frac{2}{3} = \frac{40}{3} = 13$$

En moyenne, Paul utilisera donc son vélo plutôt que sa voiture pendant environ $\underline{13 \text{ jours}}$.

3. On nous donne la loi suivie une variable aléatoire T.
T étant une variable aléatoire discrète, il vient son espérance sur son espace de réalisation :

$$E(T) = \sum_{k=10}^{18} k \times P(T=k) \underline{= 13,5 \,\text{min}}$$

Ainsi, en empruntant sa voiture, le trajet de Paul durera, en moyenne, $\underline{T_m = 13,5 \,\text{minutes}}$.

Exercice 2 — Suites

$$\begin{cases} T_0 = 180 \\ \forall n \in \mathbb{N}, T_{n+1} = 0,955 T_n + 0,9 \end{cases}$$

1. a. On cherche à montrer par récurrence que $T_n \geq 20$ pour tout entier n.

— Pour $n = 0$, on a $T_0 = 180 \geq 10$. La propriété est vraie au rang 0.

— Supposons la propriété vraie à un rang n quelconque, et montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$. On a

$$\begin{aligned} & T_n \geq 20 \\ \iff & 0,955 T_n \geq 20 \times 0,955 = 19,1 \\ \iff & 0,955 T_n + 0,9 \geq 19,1 + 0,9 = 20 \end{aligned}$$

Or, $0,995 T_n + 0,9 = T_{n+1}$, et $20 \geq 20$.
Alors on a bien $T_{n+1} \geq 20$. La propriété est donc héréditaire.

— La propriété étant vraie au rang 0 et héréditaire, alors par récurrence elle est vraie pour tout entier naturel n, et finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, T_n \geq 20}$$

La suite (T_n) est donc minorée.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$T_{n+1} - T_n = 0,955T_n + 0,9 - T_n = -0,045T_n + 0,9$$

Or, $0,9 = -20 \times -0,045$. Alors finalement, on a bien :

$$\boxed{T_{n+1} - T_n = -0,045(T_n - 20)}$$

Or, on a montré précédemment que $T_n \geq 20$ pour tout entier n, la quantité $(T_n - 20)$ est donc positive pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ce qui signifie que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, T_{n+1} - T_n \leq 0$$

La suite (T_n) est donc décroissante.

c. On a d'abord montré que la suite (T_n) est minorée, puis on a montré qu'elle est décroissante.
Or, toute suite décroissante et minorée converge. Donc la suite (T_n) est convergente.

2. $u_n = T_n - 20$

a. Soit $n \in \mathbb{N}$. On passe au rang $(n+1)$:

$$u_{n+1} = T_{n+1} - 20 = 0,955T_n + 0,9 - 20 = 0,955T_n - 19,1$$
$$u_{n+1} = 0,955(T_n - 20) \underline{= 0,955u_n}$$

La suite (u_n) est donc bien géométrique, de raison $q = 0,955$.

b. Comme $u_0 = T_0 - 20 = 160$, il vient, pour tout entier naturel n, le terme général de la suite (u_n) :

$$u_n = 160 \times 0,955^n$$

Et finalement, comme $T_n = u_n + 20$ pour tout entier n, il vient :

$$\boxed{T_n = 160 \times 0,955^n + 20}$$

c. On cherche la limite de la suite (T_n).
Comme $0,955 < 1$, on sait que $\lim_{n\to+\infty} 0,955^n = 0$. Alors finalement,

$$\lim_{n\to+\infty} T_n = \lim_{n\to+\infty} 160 \times 0,955^n + 20 \underline{= 20}$$

d. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} T_n \leq 120 &\iff 160 \times 0,955^n + 20 \leq 120 \\ &\iff 160 \times 0,955^n \leq 100 \\ &\iff 0,955^n \leq \frac{100}{160} = \frac{5}{8} = 0,625 \\ &\iff e^{n\ln(0,955)} \leq 0,625 \\ &\iff n \geq \frac{\ln(0,625)}{\ln(0,955)} = 10,2 \end{aligned}$$

D'où [1],

$$T_n \leq 120 \iff \boxed{n \geq 11}$$

1. l'inégalité est renversée à la dernière équivalence car $\ln(0,955) < 0$.

3. **a.** La limite de (T_n) était prévisible dans ce contexte, car elle correspond à la température de l'air ambiant, et il est physiquement impossible que le gâteau, en sortant du four, ne refroidisse spontanément au-delà de la température ambiante.

b. La fonction Python réalise simplement, pour une température x donnée en paramètre, la résolution de l'inéquation $T_n \leq x$.

Ainsi, l'appel `temp(120)` renverra `11`, qui est le résultat obtenu lors de la résolution analytique.

Dans le contexte de l'exercice, le centre du gâteau, une fois sorti du four, atteindra la température de 120 °C au bout de 11 minutes environ.

Exercice 3 — Géométrie dans l'espace

$$J(2,0,1), K(1,2,1), L(-2,-2,-2)$$

1. **a.** On souhaite montrer que le triangle JKL est triangle en J. Ce qui revient à vérifier que les vecteurs $\overrightarrow{JK}$ et $\overrightarrow{JL}$ sont orthogonaux.

On commence par calculer :

$$\overrightarrow{JK}\,(1-2, 2-0, 1-1) \implies \overrightarrow{JK}\,(-1,2,0)$$
$$\overrightarrow{JL}\,(-4,-2,-3)$$
$$\overrightarrow{KL}\,(-3,-4,-3)$$

On a alors :

$$\overrightarrow{JK} \cdot \overrightarrow{JL} = (-1) \times (-4) + 2 \times (-2) + 0 \times (-3) = 4 - 4 = 0$$

Les vecteurs $\overrightarrow{JK}$ et $\overrightarrow{JL}$ sont bien orthogonaux. Donc, d'après le théorème de Pythagore, le triangle JKL est rectangle en J.

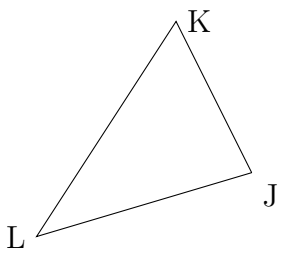
b. Le triangle JKL étant rectangle en J, son aire est donnée par :

$$\mathcal{A}(JKL) = \frac{\| \overrightarrow{JK} \| \times \| \overrightarrow{JL} \|}{2} = \frac{\sqrt{1+4+0} \times \sqrt{16+4+9}}{2} = \frac{\sqrt{5} \times \sqrt{29}}{2}$$

D'où,

$$\boxed{\mathcal{A}(JKL) = \frac{\sqrt{145}}{2}\,\text{cm}^2}$$

c. On cherche la valeur approchée de l'angle $\widehat{JKL}$.



Pour cela, la trigonométrie nous donne :

$$\tan \widehat{JKL} = \frac{\| \overrightarrow{JL} \|}{\| \overrightarrow{JK} \|} = \frac{\sqrt{29}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{145}}{5} \approx 2,41$$

D'où, $\underline{\widehat{JKL} \approx \tan^{-1}(2,41) = 67,4 \text{ degrés}}$

2. **a.** On souhaite montrer que $\vec{n}\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -10 \end{pmatrix}$ est normal au plan (JKL).

D'un côté, on a

$$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{JK} = 6 \times (-1) + 3 \times (2) + (-10) \times 0 = -6 + 6 = 0$$

Donc $\vec{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{JK}$.

D'un autre côté, on a

$$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{JL} = 6 \times (-4) + 3 \times (-2) + (-10) \times (-3) = -24 - 6 + 30 = 0$$

$\vec{n}$ est donc orthogonal à $\overrightarrow{JL}$.

Or, par définition, tout vecteur de (JKL) peut s'écrire comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{JK}$ et $\overrightarrow{JL}$, et comme $\vec{n}$ est orthogonal à ces deux vecteurs, alors il est orthogonal à tout vecteur du plan.

Donc $\vec{n}$ est bien normal au plan (JKL).

b. Le vecteur $\vec{n}$ étant normal au plan, une équation cartésienne du plan (JKL) est $(JKL) : 6x + 3y - 10z + c = 0$ $(c \in \mathbb{R})$. Il reste alors à trouver la valeur de la constante c.

Comme $J(2, 0, 1) \in (JKL)$, on a $6 \times 2 + 0 - 10 + c = 0 \implies c = -2$.

D'où, $\boxed{(JKL) : 6x + 3y - 10z - 2 = 0}$ est une équation cartésienne du plan (JKL).

3. $T(10, 9, -6)$

a. On cherche une représentation paramétrique de la droite Δ passant par T et orthogonale à (JKL).

La droite Δ étant orthogonale au plan (JKL), elle admet pour vecteur directeur $\vec{n}$. Ses représentations paramétriques sont donc de la forme :

$$\Delta : \begin{cases} x = x_0 + 6t \\ y = y_0 + 3t \\ z = z_0 - 10t \end{cases} , t \in \mathbb{R}, x_0, y_0, z_0 \in \mathbb{R}$$

Il reste alors à déterminer les constantes x_0, y_0 et z_0. Or, on sait que $T \in \Delta$. Alors on peut prendre $x_0 = x_T = 10$, $y_0 = y_T = 9$ et $z_0 = z_T = -6$.

Une représentation paramétrique de la droite Δ est donc :

$$\boxed{\Delta : \begin{cases} x = 10 + 6t \\ y = 9 + 3t \\ z = -6 - 10t \end{cases} , t \in \mathbb{R}}$$

b. On cherche les coordonnées du point H, projeté orthogonal de T sur le plan (JKL). La droite Δ passant par T étant orthogonale au plan (JKL), cela revient à trouver les coordonnées du point d'intersection de Δ et (JKL).
Soit $H(x_H, y_H, z_H) \in \Delta \cap (JKL)$.
Premièrement, $H \in (JKL)$, donc ses coordonnées vérifient :

$$6x_H + 3y_H - 10z_H - 2 = 0 \tag{1}$$

Secondement, $H \in \Delta$, alors :

$$\exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x_H = 10 + 6t \\ y_H = 9 + 3t \\ z_H = -6 - 10t \end{cases} \tag{2}$$

Soit $t \in \mathbb{R}$ vérifiant (2). Alors dans (1) :

$$\begin{aligned} &6(10+6t) + 3(9+3t) - 10(-6-10t) - 2 = 0 \\ \iff\ &60 + 36t + 27 + 9t + 60 + 100t - 2 = 0 \\ \iff\ &145 + 145t = 0 \\ \iff\ &145t = -145 \\ \iff\ &t = -1 \end{aligned}$$

Alors en injectant cette valeur de t dans l'équation paramétrique de Δ, il vient :

$$\begin{cases} x_H = 10 + 6 \times (-1) = 4 \\ y_H = 9 + 3 \times (-1) = 6 \\ z_H = -6 + 10 \times (-1) = 4 \end{cases}$$

Donc finalement, $\boxed{H(4,6,4)}$ projeté orthogonal de T sur (JKL).

c. On cherche le volume du tétraèdre $JKLT$. Or, on nous donne :

$$V = \frac{1}{3}Bh$$

avec B aire d'une base.
Ici, nous avons précédemment calculé l'aire du triangle JKL.
De plus, la hauteur associée à cette base est le segment $[HT]$, dont nous connaissons les coordonnées des deux extrémités, donc leur distance. Cette dernière vaut :

$$HT = \sqrt{(10-4)^2 + (9-6)^2 + (-6-4)^2} = \sqrt{145}$$

Alors finalement,

$$V = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{145}}{2} \times \sqrt{145} = \frac{145}{6}$$

$$\boxed{V = \frac{145}{6}\,\text{cm}^3}$$

Exercice 4 — Exponentielle

1. VRAI

Justification :

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1-e^x}{1+e^x} = \frac{(1+e^x)-(1-e^x)}{1+e^x} &= \frac{1+e^x-1+e^x}{1+e^x} \\ &= \frac{2e^x}{1+e^x} = \frac{2}{\frac{1}{e^x}(1+e^x)} \\ &= \frac{2}{\frac{1}{e^x}+\frac{e^x}{e^x}} = \frac{2}{1+e^{-x}} \end{aligned}$$

L'égalité est donc bien vérifiée pour tout réel x.

2. VRAI

Justification :

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$g'(x) = \frac{e^x(1+e^x)-e^{2x}}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x}{(1+e^x)^2} > 0$$

Ce qui signifie que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

De plus, on remarque que $g(0) = \frac{1}{2}$ donc 0 est solution de $g(x) = \frac{1}{2}$.

Finalement, comme g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, cette solution est unique.

(NB : *sans remarquer la solution évidente, on peut obtenir la même conclusion en calculant les limites en $\pm\infty$ de g et en exploitant le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires ou le théorème de la bijection, à la discrétion du lecteur.*)

3. VRAI

Justification :

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$f'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = x(2-x)e^{-x}$$

L'axe des abscisses est la droite $y = 0$, *i.e.* une droite horizontale. On cherche donc éventuels points critiques de f (donc les valeurs réelles annulant sa dérivée) ayant pour ordonnée 0.

Comme e^{-x} est une grandeur strictement positive, $f'(x)$ s'annulera en $x = 0$ et $x = 2$.

Or, $f(0) = 0$ et $f(2) = 2^2 \times e^{-2} \neq 0$.

L'axe des abscisses est donc tangent à $\mathcal{C}$ uniquement au point de coordonnées $(0, 0)$.

4. FAUX

Justification :

On cherche les points d'inflexion de h, donc les solutions réelles de $h''(x) = 0$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} h'(x) &= e^x(1-x^2) - 2xe^x \\ \implies h''(x) &= e^x(1-x^2) - 2xe^x - 2e^x - 2xe^x \\ &= e^x(1-x^2-2x-2-2x) \\ h''(x) &= -(x^2+4x+1)e^x \end{aligned}$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned} h''(x) = 0 &\iff -(x^2+4x+1)e^x = 0 \\ &\iff x^2+4x+1 = 0 \end{aligned}$$

Or, l'équation du second degré $x^2+4x+1=0$ a pour discriminant $\Delta = 16-4 = 12 > 0$ et admet donc deux solutions réelles. La dérivée seconde de h s'annulera donc deux fois, signifiant que la courbe représentative de la fonction h admet deux points d'inflexion.

5. FAUX

Justification :

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\frac{e^x}{e^x+x} = \frac{1}{1+xe^{-x}}$$

Or, par croissance comparée, en $+\infty$, on a $xe^{-x} \to 0$.

Alors

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x+x} = 1 \neq 0$$

6. VRAI

Justification :

Soit $x \in \mathbb{R}$.

On va étudier le signe de $1+e^{2x}-2e^x$.

En opérant le changement de variable bijectif $X = e^x$, cette expression devient :

$$1-2X+X^2$$

Or, $(-2)^2 - 4\times 1\times 1 = 0$, donc l'équation $1-2X+X^2=0$ admettra une unique solution. Autrement dit cette expression ne changera pas de signe et restera positive (facteur positif devant le terme de plus haut degré).

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, 1+e^{2x}-2e^x \geq 0$.

* *
*

Proposé par T. Prévost (thomas.prevost@protonmail.com),
pour le site https://www.sujetdebac.fr/
Compilé le 23 février 2023 après rectifications sur le corrigé original

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.