Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour consulter tous nos sujets d'annales et corrigés du Bac Général Maths + SES, veuillez visiter :
bac-maths-ses.fr/annales-sujets-et-corriges

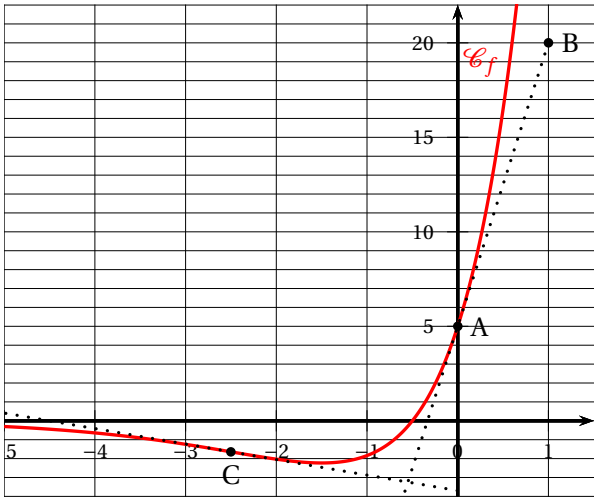
Baccalauréat Métropole 13 septembre 2021

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Candidats libres

Le candidat traite 4 exercices : les exercices 1, 2 et 3 communs à tous les candidats et un seul des deux exercices A ou B.

EXERCICE 1 commun à tous les candidats **4 points**



1. On peut affirmer que :

a. $f'(-0,5) = 0$

Le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse $-0,5$ est manifestement positif — Faux

b. si $x \in]-\infty\,;\,-0,5[$, alors $f'(x) < 0$

Le nombre dérivé s'annule en à peu près en $x = -1,5$ — Faux

c. $f'(0) = 15$

Graphiquement $f'(0) = \dfrac{20-5}{1-0} = 15$ — Vrai

d. la fonction dérivée f' ne change pas de signe sur $\mathbb{R}$

f' est négative sur $]-\infty\,;\,-1,5[$ et positive sur $]-1,5\,;\,+\infty[$ — Faux

2. On admet que la fonction f représentée ci-dessus est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (ax+b)\mathrm{e}^x$, où a et b sont deux nombres réels et que sa courbe coupe l'axe des abscisses en son point de coordonnées $(-0,5\,;\,0)$.

On peut affirmer que :

a. $a = 10$ et $b = 5$

b. $a = 2,5$ et $b = -0,5$

c. $a = -1,5$ et $b = 5$

d. $a = 0$ et $b = 5$

Graphiquement $f(0) = 5 \iff be^0 = 5 \iff b = 5$;

D'autre part f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle :

$f'(x) = ae^x + (ax + b)e^x = e^x(ax + a + b)$.

On a vu que $f'(0) = 15 \iff a + b = 15 \iff a + 5 = 15 \iff a = 10$: la **réponse a.** est vraie.

3. On admet que la dérivée seconde de la fonction f est définie sur par :

$$f''(x) = (10x + 25)e^x.$$

On peut affirmer que :

a. La fonction f est convexe sur $\mathbb{R}$

b. La fonction f est concave sur $\mathbb{R}$

c. Le point C est l'unique point d'inflexion de $\mathscr{C}_f$

d. $\mathscr{C}_f$ n'admet pas de point d'inflexion

$f''(x) = 0 \iff (10x + 25)e^x = 0 \iff 10x + 25 = 0$ (car $e^x > 0$ quel que soit $x \in \mathbb{R}$) ; donc $f''(x) = 0 \iff x = -2,5$: C est donc l'unique point d'inflexion. **Réponse c.**

4. On considère deux suites (U_n) et (V_n) définies sur $\mathbb{N}$ telles que :

- pour tout entier naturel n, $U_n \leqslant V_n$;
- $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = 2$.

On peut affirmer que :

a. la suite (U_n) converge

Non car par exemple si $U_n = -n$ et $V_n = 2 + \dfrac{1}{n}$ ces deux suites vérifient l'énoncé et la suite (U_n) diverge ;

b. pour tout entier naturel n, $V_n \leqslant 2$

Non avec $V_n = 2 + \dfrac{1}{n}$ on a $V_n \geqslant 2$;

c. la suite (U_n) diverge

Non avec par exemple $U_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ et $V_n = 2 + \dfrac{1}{n}$, les deux suites vérifient l'énoncé et la suite (U_n) converge ;

d. la suite (U_n) est majorée

On sait, d'après le cours que toute suite convergente est bornée ; donc la suite (V_n) est majorée et donc il existe un réel M tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $V_n \leqslant M$.

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $U_n \leqslant V_n$; on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $U_n \leqslant M$ et donc que la suite (U_n) est majorée. **Réponse d.**

Exercice 2 commun à tous les candidats **5 points**

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\left]-\dfrac{1}{3}\,;\,+\infty\right[$ par :

$$f(x)=\frac{4x}{1+3x}$$

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0=\dfrac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=f(u_n)$.

1. On a donc pour $n=0$, $u_1=f(u_0)=f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{2}{1+\frac{3}{2}}=\dfrac{2}{\frac{5}{2}}=\dfrac{4}{5}$.

2. On admet que la fonction f est croissante sur l'intervalle $\left]-\dfrac{1}{3}\,;\,+\infty\right[$.

a. On veut montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a :

$$\frac{1}{2}\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 2.$$

Initialisation : on a $u_0=\dfrac{1}{2}$ et $u_1=\dfrac{4}{5}$; de plus $\dfrac{1}{2}\leqslant\dfrac{1}{2}\leqslant\dfrac{4}{5}\leqslant 2$, donc :
$\dfrac{1}{2}\leqslant u_0\leqslant u_1\leqslant 2$: l'encadrement est vrai au rang 0 ;
Hérédité : on suppose que pour $n\geqslant 0$, $\dfrac{1}{2}\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 2$.
La fonction f étant croissante les images des quatre nombres ci-dessus sont rangées dans le même ordre, soit : $f\left(\dfrac{1}{2}\right)\leqslant f(u_n)\leqslant f(u_{n+1})\leqslant f(2)$.
Or on a vu que $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{4}{5}$ et on a $f(2)=\dfrac{8}{1+6}=\dfrac{8}{7}$;
de plus $f(u_n)=u_{n+1}$ et $f(u_{n+1})=u_{n+2}$ donc $\dfrac{4}{5}\leqslant u_{n+1}\leqslant u_{n+2}\leqslant\dfrac{8}{7}$.
Or $\dfrac{1}{2}<\dfrac{4}{5}$ et $\dfrac{8}{7}<2$; on a donc finalement :
$\dfrac{1}{2}\leqslant u_{n+1}\leqslant u_{n+2}\leqslant 2$: l'encadrement est donc vrai au rang $n+1$.
Conclusion : l'encadrement est vrai au rang 0 et s'il est vrai au rang $n\geqslant 0$, il est vrai au rang $n+1$: par le principe de récurrence pour tout entier naturel n, on a :
$\dfrac{1}{2}\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 2$.

b. La suite (u_n) est croissante et elle majorée par 2, elle est donc convergente vers une limite ℓ telle que : $\dfrac{1}{2}\leqslant\ell\leqslant 2$.

c. La fonction f est continue car dérivable au moins sur $\mathbb{R}_+$ donc la limite ℓ vérifie l'égalité $f(\ell)=\ell$; on résout cette équation :

$$f(\ell)=\ell\iff\frac{4\ell}{1+3\ell}=\ell\iff 4\ell=\ell(1+3\ell)\iff 0=\ell(1+3\ell-4)$$
$$\iff\ell(3\ell-3)=0\iff 3\ell(\ell-1)=0\iff\left[\begin{array}{c}\ell=0\\ \text{ou}\\ \ell-1=0\end{array}\right.\iff\left[\begin{array}{c}\ell=0\\ \text{ou}\\ \ell=1\end{array}\right.$$

Comme $\ell \geqslant \dfrac{1}{2}$, la seule solution possible est 1 ; la suite (u_n) converge vers 1.

3. **a.** On complète la fonction Python ci-dessous qui, pour tout réel positif E, détermine la plus petite valeur P tel que : $1-u_P < E$:

```
def seuil(E) :
    u = 0,5
    n = 0
    while 1 − u >= E
        u = 4 ∗ u/(1 + 3 ∗ u)
        n = n + 1
    return n
```

b. On obtient $u_7 \approx 0{,}999\,939$, donc $1-u_7 < 10^{-4}$. Le programme renvoie $n = 7$.

4. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par :

$$v_n = \frac{u_n}{1-u_n}$$

a. Pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}}{1-u_{n+1}}$ soit en utilisant la définition de u_{n+1} :

$v_{n+1} = \dfrac{\frac{4u_n}{1+3u_n}}{1-\frac{4u_n}{1+3u_n}}$ soit en multipliant chaque terme par $1+3u_n$:

$v_{n+1} = \dfrac{4u_n}{1+3u_n-4u_n} = \dfrac{4u_n}{1-u_n} = 4\dfrac{u_n}{1-u_n} = 4v_n$.

L'égalité, vraie pour tout naturel n, $v_{n+1} = 4v_n$ montre que la suite (v_n) est géométrique de raison 4, de premier terme $v_0 = \dfrac{u_0}{1-u_0} = \dfrac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$.

On sait qu'alors , pour tout entier naturel n, $v_n = 1 \times 4^n = 4^n$.

b. Quel que soit $n \in \mathbb{N}$,

$v_n = \dfrac{u_n}{1-u_n} \iff v_n(1-u_n) = u_n \iff v_n - u_n v_n = u_n \iff v_n = u_n v_n + u_n \iff v_n = u_n(v_n+1)$.

Comme $v_n = 4^n$, $v_n \geqslant 1$, donc $v_n + 1 \geqslant 2$, donc $v_n + 1 \neq 0$ et finalement en multipliant par $\dfrac{1}{v_n+1}$, on obtient $u_n = \dfrac{v_n}{v_n+1}$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

c. On sait que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 4^n$, d'où en remplaçant dans l'écriture précédente :

$u_n = \dfrac{4^n}{4^n+1}$ et en multipliant par $\dfrac{1}{4^n}$:

$u_n = \dfrac{1}{1+\frac{1}{4^n}}$. Or $\dfrac{1}{4^n} = \dfrac{1^n}{4^n} = \left(\dfrac{1}{4}\right)^n = 0{,}25^n$, d'où $u_n = \dfrac{1}{1+0{,}25^n}$.

Comme $0 < 0{,}25 < 1$, on peut dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}25^n = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{1+0} = 1$.

Exercice 3 commun à tous les candidats **6 points**

Les parties I et II peuvent être abordées de façon indépendante.

Partie I : Effet de l'introduction d'une nouvelle espèce.

Soit f la fonction définie pour $t \in [0\,;\,120]$ par :

$$f(t) = \left(0,04t^2 - 8t + 400\right)\mathrm{e}^{\frac{t}{50}} + 40.$$

La variable t représente le temps écoulé, en jour, à partir de l'introduction à l'instant $t = 0$ des truites dans le lac, et $f(t)$ modélise le nombre de crapauds à l'instant t.

1. Pour $t = 0$, $f(0) = 400\,\mathrm{e}^0 + 40 = 440$ (crapauds)

2. Sur l'intervalle $[0; 120]$ en dérivant le produit :

$$\begin{aligned} f'(t) &= (0,08t - 8)\mathrm{e}^{\frac{t}{50}} + \frac{1}{50}\left(0,04t^2 - 8t + 400\right)\mathrm{e}^{\frac{t}{50}} = \mathrm{e}^{\frac{t}{50}}\left[(0,08t - 8) + \frac{1}{50}\left(0,04t^2 - 8t + 400\right)\right] \\ &= \mathrm{e}^{\frac{t}{50}}\left(0,08t - 8 + 0,000\,8t^2 - 0,16t + 8\right) = \mathrm{e}^{\frac{t}{50}}\left(-0,08t + 0,000\,8t^2\right) \\ &= 0,000\,8\left(t^2 - 100t\right)\mathrm{e}^{\frac{t}{50}} = t(t-100)\mathrm{e}^{\frac{t}{50}} \times 8 \times 10^{-4}. \end{aligned}$$

3. On sait que quel que soit $t \in [0\,;\,120]$, $\mathrm{e}^{\frac{t}{50}} > 0$: le signe de $f'(t)$ est donc celui du trinôme $t(t-100)$ qui est positif sauf sur l'intervalle $]0\,;\,100[$ (entre les racines du trinôme).
$f(0) = 480$, $f(100) = (400 - 800 + 400)\mathrm{e}^{\frac{100}{50}} + 40 = 0 + 40 = 40$ et
$f(120) = 576 - 960 + 400)\mathrm{e}^{\frac{120}{50}} + 40 = 16\mathrm{e}^{2,4} + 40 \approx 216,37$.
On dresse le tableau de variations de f sur l'intervalle $[0\,;\,120]$:

t	0		100		120
$t(t-100)$	0	$-$	0	$+$	
$f'(t)$	0	$-$	0	$+$	
f	440	↘	40	↗	216,37

4. Selon cette modélisation :

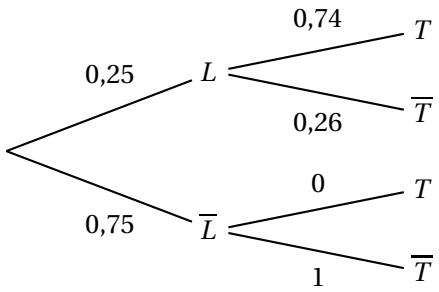
a. On a vu dans la question précédente que $f(100) = 40$ est le minimum de la fonction f, on a donc $J = 100$.

b. On a aussi vu que de 100 jours à 120 jours le nombre de crapauds croît strictement de 40 à environ 216 : il dépassera donc 140 individus.

c. Soit J_{140} la durée en jour à partir de laquelle le nombre de crapauds dépassera 140 individus. La calculatrice donne :
$f(115) \approx 130 < 140$ et $f(116) \approx 144 > 140$, donc $J_{140} = 116$.

Partie II : Effet de la Chytridiomycose sur une population de têtards

1. On complète l'arbre de probabilité suivant en utilisant les données de l'énoncé :



2. D'après la loi des probabilités totales :
$P(T) = P(L \cap T) + P\left(\overline{L} \cap T\right) = P(L) \times P_L(T) + P\left(\overline{L}\right) \times P_{\overline{L}}(T) = 0,25 \times 0,74 + 0,75 \times 0 = 0,185$

3. Le têtard n'est pas contaminé. La probabilité que le lac soit infecté est :
$P_{\overline{T}}(L) = \dfrac{P\left(L \cap \overline{T}\right)}{P\left(\overline{T}\right)} = \dfrac{0,25 \times 0,26}{1 - 0,185} = \dfrac{0,065}{0,815} \approx 0,0797$, soit 0,080 au millième près.

Exercice au choix du candidat **5 points**

Le candidat doit traiter un seul des deux exercices A ou B.

Exercice A

Principaux domaines abordés :
Géométrie de l'espace rapporté à un repère orthonormé.

1. Dans le repère orthonormé $\left(\text{A} ; \overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AD}}, \overrightarrow{\text{AE}}\right)$: $\text{I}\left(0 ; \dfrac{1}{4} ; 1\right)$, $\text{J}\left(\dfrac{1}{4} ; 0 ; 1\right)$, $\text{K}\left(1 ; 0 ; \dfrac{1}{4}\right)$.

2. On a $\overrightarrow{\text{AG}}(1 ; 1 ; 1)$, $\overrightarrow{\text{IJ}}\left(\dfrac{1}{4} ; -\dfrac{1}{4} ; 0\right)$, $\overrightarrow{\text{IK}}\left(1 ; -\dfrac{1}{4} ; -\dfrac{3}{4}\right)$.
Or $\overrightarrow{\text{AG}} \cdot \overrightarrow{\text{IJ}} = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4} + 0 = 0$ et $\overrightarrow{\text{AG}} \cdot \overrightarrow{\text{IK}} = 1 - \dfrac{1}{4} - \dfrac{3}{4} = 0$.
Less vecteurs $\overrightarrow{\text{IJ}}$ et $\overrightarrow{\text{IK}}$ ne sont manifestement pas colinéaires, donc le vecteur $\overrightarrow{\text{AG}}$ étant orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (IJK) est normal à ce plan.

3. D'après la question précédente on sait que : $M(x ; y ; z) \in$ (IJK) $\iff 1x + 1y + 1z + d = 0$.
Or par exemple $\text{I}\left(0 ; \dfrac{1}{4} ; 1\right) \in$ (IJK) $\iff 0 + \dfrac{1}{4} + 1 \times 1 + d = 0 \iff 1 + 4 + 4d = 0 \iff 4d = -5 \iff d = -\dfrac{5}{4}$.
Finalement : $M(x ; y ; z) \in$ (IJK) $\iff x + y + z - \dfrac{5}{4} = 0 \iff 4x + 4y + 4z - 5 = 0$.
Le plan (IJK) a pour équation cartésienne $4x + 4y + 4z - 5 = 0$.

4. On a $\overrightarrow{\text{BC}}\,(0\ ;\ 1\ ;\ 0)$. Donc :

$$M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (\text{BC}) \iff \overrightarrow{\text{B}M} = t\overrightarrow{\text{BC}} \text{ (avec } t \in \mathbb{R}) \iff \begin{cases} x-1 &= t\times 0\\ y-0 &= t\times 1, \quad t\in\mathbb{R}\\ z-0 &= t\times 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x &= 1\\ y &= t, \quad t\in\mathbb{R}.\\ z &= 0 \end{cases}$$

La droite (BC) a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x &= 1\\ y &= t, \quad t\in\mathbb{R}.\\ z &= 0 \end{cases}$

5. Les coordonnées de $\text{L}(x\ ;\ y\ ;\ z)$ vérifient l'équation de (BC) et l'équation du plan (IJK) donc le système : $\begin{cases} x &= 1\\ y &= t\\ z &= 0\\ 4x+4y+4z-5 &= 0 \end{cases}$

ce qui donne en remplaçant x, y et z par leurs valeurs en fonction de t dans la dernière équation :

$4\times 1+4t+4\times 0-5=0 \iff 4t+4-5=0 \iff 4t-1=0 \iff t=\dfrac{1}{4}$.

Les coordonnées de L sont donc $\left(1\ ;\ \dfrac{1}{4}\ ;\ 0\right)$.

6. Voir l'annexe.

L'intersection du plan (IJK) avec la face (BCGF) est le segment [KL].

L'intersection du plan (IJK) et du cube a été dessinée en tirets rouge.

7. Soit $\text{M}\left(\frac{1}{4}\ ;\ 1\ ;\ 0\right)$.

Comme $\text{L} \in$ (IJK), il suffit de vérifier que M est aussi un point de ce plan, soit d'après le résultat de la question 4. :

$4x_\text{M}+4y_\text{M}+4z_\text{M}-5 = 4\times\frac{1}{4}+4\times 1+4\times 0-5 = 4+1-5=0$ donc $\text{M}\left(\frac{1}{4}\ ;\ 1\ ;\ 0\right) \in$ (IJK).

Conclusion : les points I, J, K, L et M sont coplanaires.

Exercice B

Principaux domaines abordés : Fonction logarithme.

Partie I

On considère la fonction h définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par : $h(x) = 1+\dfrac{\ln(x)}{x}$.

1. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x = -\infty$, et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$.

Par produit on déduit que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{\ln x}{x} = -\infty$ et donc que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} h(x) = -\infty$.

2. On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 1$

3. La fonction h est dérivable comme quotient de fonctions dérivables sur $]0\,;\,+\infty[$ et sur cet intervalle : $h'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}\times x - 1\times \ln x}{x^2} = \dfrac{1-\ln x}{x^2}$.

4. Comme $x^2 > 0$ pour $x \in]0\,;\,+\infty[$ le signe de $h'(x)$ est celui du numérateur $1-\ln x$:

- $1-\ln x > 0 \iff 1 > \ln x \iff \text{e} > x$:
  la fonction h est donc strictement croissante sur $]0\,;\,\text{e}[$;
- $1-\ln x < 0 \iff 1 < \ln x \iff \text{e} < x$:
  la fonction h est donc strictement décroissante sur $]\text{e}\,;\,+\infty[$;
- $1-\ln x = 0 \iff 1 = \ln x \iff \text{e} = x$:
  la fonction h a un maximum $f(\text{e}) = 1 + \dfrac{\ln \text{e}}{\text{e}} = 1 + \dfrac{1}{\text{e}}$.

D'où le tableau de variations de h :

x	0		e		$+\infty$
$h'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
h	‖ $-\infty$	↗	$1+\frac{1}{\text{e}}$	↘	1

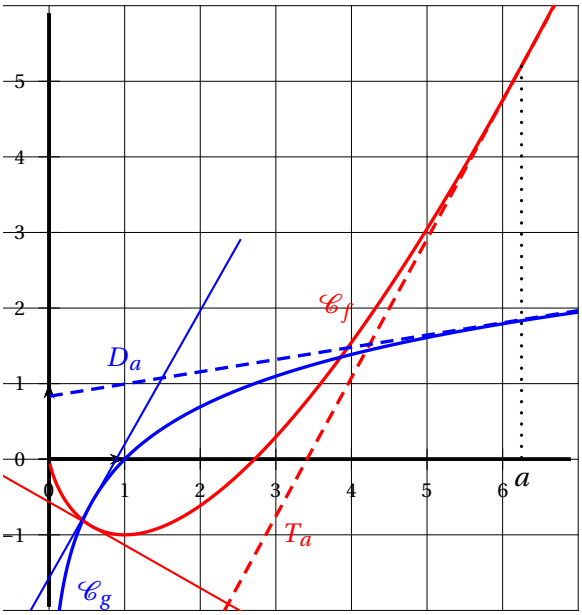
5. Comme $1 + \frac{1}{\text{e}} > 1 > 0$, le tableau de variations montre que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]0\,;\,\text{e}[$.

On a $f(1) = 1 + \dfrac{0}{1} = 1$, donc $0 < \alpha < 1$;

La calculatrice donne : $f(0{,}5) \approx -0{,}4$ et $f(0{,}6) \approx 0{,}15$, donc $0{,}5 < \alpha < 0{,}6$.

Partie II

Soit les fonctions f et g définies sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = x\ln(x) - x$ et $g(x) = \ln(x)$.



1. La fonction f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et sur cet intervalle :

$f'(x) = \ln(x) + x \times \dfrac{1}{x} - 1 = \ln(x) + 1 - 1 = \ln(x)$

Donc le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point de la courbe d'abscisse a est égal à $f'(a) = \ln(a)$.

2. La fonction g est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et sur cet intervalle : $g'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Donc le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_g$ au point de la courbe d'abscisse a est égal à $g'(a) = \dfrac{1}{a}$.

3. Le produit des coefficients directeurs est égal à -1, soit :

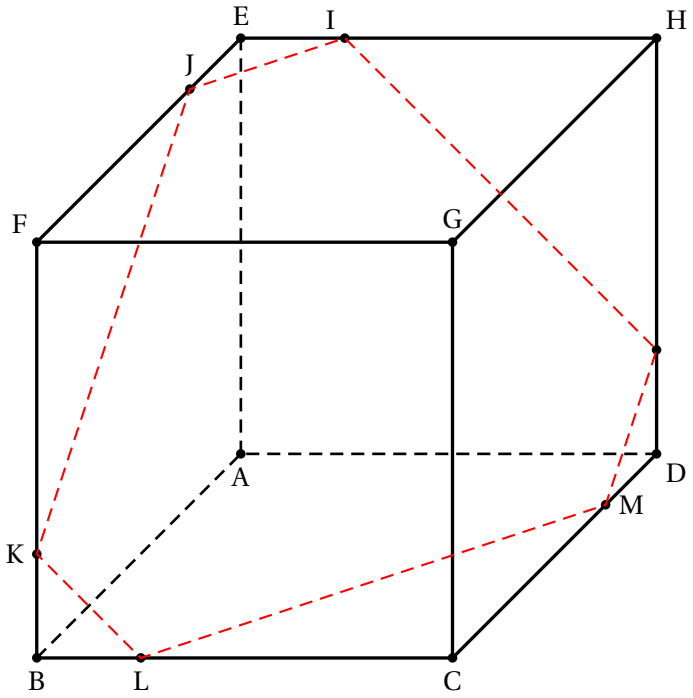
$\ln(a) \times \dfrac{1}{a} = -1 \iff \dfrac{\ln(a)}{a} = -1 \iff 1 + \dfrac{\ln(a)}{a} = 0 \iff h(a) = 0$

et on a vu à la fin de la partie I que cette équation n'avait qu'une solution $a = \alpha$: il existe une seule valeur de a telle que les droites T_a et D_a sont perpendiculaires : $a = \alpha$.

Voir la figure.

ANNEXE À COMPLÉTER ET À RENDRE AVEC LA COPIE

À COMPLÉTER SEULEMENT PAR LES ÉLÈVES AYANT CHOISI DE TRAITER L'EXERCICE A



Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.