Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour consulter tous nos sujets d'annales et corrigés du Bac Général Maths + SES, veuillez visiter :
bac-maths-ses.fr/annales-sujets-et-corriges

∽ Baccalauréat Métropole 13 septembre 2021 J2 ∾

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

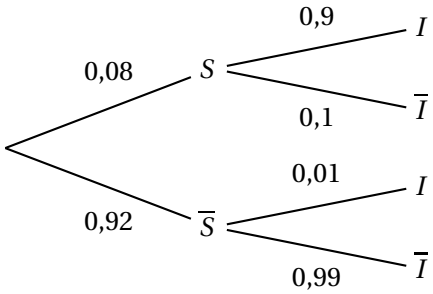
Candidats libres

Le candidat traite 4 exercices : les exercices 1, 2 et 3 communs à tous les candidats et un seul des deux exercices A ou B.

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

1.



2. **a.** On a $P(S \cap I) = P(S) \times P_S(I) = 0,08 \times 0,9 = 0,072$

b. On a de même $P\left(\overline{S} \cap I\right) = P\left(\overline{S}\right) \times P_{\overline{S}}(I) = 0,92 \times 0,01 = 0,0092$.
D'après la loi des probabilités totales :
$P(I) = P(S \cap I) + P\left(\overline{S} \cap I\right) = 0,072 + 0,0092 = 0,0812$.

c. Il faut calculer $P_I(S) = \dfrac{P(I \cap S)}{P(I)} = \dfrac{0,072}{0,0812} \approx 0,887$ soit 0,89 au centième près.

3. **a.** Les tirages étant indépendants les uns des autres et étant assez nombreux on peut considérer que la variable Z suit une loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0,08$.

b. On a $P(Z = 0) = 0,08^0 \times 0,92^{50} \approx 0,015466$;
$P(Z = 1) = \binom{50}{1} \times 0,08 \times 0,92^{49} \approx 0,067426$, donc
$P(Z \geqslant 2) = 1 - [P(Z = 0) + P(Z = 1)] = 1 - (0,015466 + 0,067426) \approx 0,917$, soit 0,92 au centième près.

EXERCICE 2 **5 points**

Commun à tous les candidats

1. Pour $t = -2$, on trouve les coordonnées de B.

2. Le vecteur $\overrightarrow{\text{AB}}$ admet pour coordonnées : $(2-1\ ;\ 1-0\ ;\ 0-2)$ soit $(1\ ;\ 1\ ;\ -2)$

3. $M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in$ (AB) s'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{\text{A}M} = t\overrightarrow{\text{AB}}$ soit :

$$\begin{cases} x-1 = 1 \times t \\ y-0 = 1 \times t \\ z-2 = -2 \times t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} x = 1+t \\ y = t \\ z = 2-2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

En posant $t = 1 - u$, on obtient :

$M(x\,;\,y\,;\,z) \in (\text{AB}) \iff \begin{cases} x &= 2-u \\ y &= 1-u \\ z &= 2u \end{cases} \quad u \in \mathbb{R}$. Donc réponse B.

4. La droite Δ a pour vecteur directeur $\vec{\delta}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Soit $\mathscr{P}$ le plan dont on cherche une équation.

$M(x\,;\,y\,;\,z) \in \mathscr{P} \iff \overrightarrow{\text{C}M} \cdot \vec{\delta} = 0 \iff 2(x-0)+1(y-1)-1(z-2) = 0 \iff$

$2x+y-1-z+2 = 0 \iff 2x+y-z+1 = 0$.

5. En faisant apparaître le point A dans chaque vecteur (Chasles), on obtient :

$\overrightarrow{\text{OA}} + \overrightarrow{\text{AD}} = 3\overrightarrow{\text{OA}} - \overrightarrow{\text{OA}} - \overrightarrow{\text{AB}} - \overrightarrow{\text{OA}} - \overrightarrow{\text{AC}} \iff \overrightarrow{\text{AD}} = -\overrightarrow{\text{AB}} - \overrightarrow{\text{AC}}$: le vecteur $\overrightarrow{\text{AD}}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{AC}}$, ces trois vecteurs sont donc coplanaires.

EXERCICE 3 **6 points**

Commun à tous les candidats

Partie I

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x - \text{e}^{-2x}.$$

On appelle Γ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\right)$.

1. • On a $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \text{e}^{-2x} = +\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to-\infty} -\text{e}^{-2x} = -\infty$; donc par somme de limites :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

• On a $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \text{e}^{-2x} = 0$; donc par somme de limites $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

2. la fonction f est dérivable comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle :

$f'(x) = 1 - (-2)\text{e}^{-2x} = 1 + 2\text{e}^{-2x}$.

On sait que quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $\text{e}^{-2x} > 0$, donc $1 + 2\text{e}^{-2x} > 1 > 0$. La dérivée est positive donc la fonction f est strictement croissante de moins l'infini à plus l'infini.

3. La fonction f est continue car dérivable et strictement croissante ; comme $0 \in \mathbb{R}$, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel unique $\alpha \in \mathbb{R}$ telle que $f(\alpha) = 0$.

La calculatrice donne :

$f(0) = -1$ et $f(1) \approx 0,865$, donc $0 < \alpha < 1$;

$f(0,4) \approx -0,05$ et $f(0,5) \approx 0,13$, donc $0,4 < \alpha < 0,5$;

$f(0,42) \approx -0,01$ et $f(0,43) \approx 0,007$, donc $0,42 < \alpha < 0,43$.

4. On a donc :

- sur $]-\infty\,;\,\alpha[$, $f(x)<0$;
- sur $]\alpha\,;\,+\infty[$, $f(x)>0$;
- et $f(\alpha)=0$.

Partie II

1.

$$h(t)=\sqrt{t^2+\mathrm{e}^{-2t}}$$

a. Soit $u(t)=t^2+\mathrm{e}^{-2t}$, donc $h(t)=\sqrt{u(t)}$ fonction dérivable car composée de deux fonctions « racine » et h dérivables.
Donc $h'(t)=\dfrac{u'(t)}{2\sqrt{u(t)}}=\dfrac{2t-2\mathrm{e}^{-2t}}{2\sqrt{t^2+\mathrm{e}^{-2t}}}=\dfrac{t-\mathrm{e}^{-2t}}{\sqrt{t^2+\mathrm{e}^{-2t}}}=\dfrac{f(t)}{\sqrt{t^2+\mathrm{e}^{-2t}}}$.

b. Le dénominateur étant positif, le signe de $h'(t)$ est celui du numérateur soit $f(t)$ dont on a vu le signe dans la partie I.

Donc :

• sur $]-\infty\,;\,\alpha[$, $f(t)<0$ donc $h'(t)<0$: la fonction est strictement décroissante sur cet intervalle ;

• sur $]\alpha\,;\,+\infty[$, $f(x)>0$ donc $h'(t)>0$: la fonction est strictement croissante sur cet intervalle ;

• et $f(\alpha)=0$, donc $h(\alpha)$ est le minimum de la fonction h.

La distance OM est donc minimale pour $t=\alpha$ et l'ordonnée de M est alors $\mathrm{e}^{-\alpha}$.

Le point de la courbe le plus proche de l'origine est donc le point $\mathrm{A}(\alpha\,;\,\mathrm{e}^{-\alpha})$.

α est l'abscisse du point d'intersection de Γ avec l'axe des abscisses. Il suffit de tracer la parallèle à l'axe des ordonnées passant par ce point, elle coupe $\mathscr{C}$ au point A

2. **a.** Le coefficient directeur de la tangente T au point d'abscisse α est $g'(\alpha)=-\mathrm{e}^{-\alpha}$

b. D'après le rappel le produit des coefficients directeurs est $-\mathrm{e}^{-\alpha}\times\dfrac{\mathrm{e}^{-\alpha}}{\alpha}=-\dfrac{\mathrm{e}^{-2\alpha}}{\alpha}$.

or on sait que $f(\alpha)=0\iff\alpha-\mathrm{e}^{-2\alpha}=0\iff\alpha=\mathrm{e}^{-2\alpha}\iff\dfrac{\mathrm{e}^{-2\alpha}}{\alpha}=1$, donc finalement le produit des coefficients directeurs est égal à -1. La droite (OA) et la tangente T sont perpendiculaires.

Voir à la fin.

EXERCICE au choix du candidat **5 points**

Le candidat doit traiter un seul des deux exercices A ou B.

Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B.

Pour éclairer son choix, les principaux domaines abordés dans chaque exercice sont indiqués dans un encadré.

Exercice A

Principaux domaines abordés :
Suites numériques ; raisonnement par récurrence.

$$u_0 = 16 \quad ; \quad v_0 = 5\,;$$

et pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} u_{n+1} &= \dfrac{3u_n + 2v_n}{5} \\ v_{n+1} &= \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$$

1. • $u_1 = \dfrac{3\times 16 + 2\times 5}{5} = \dfrac{58}{5}$;

• $v_1 = \dfrac{16+5}{2} = \dfrac{21}{2}$.

2. On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par : $w_n = u_n - v_n$.

a. On a quel que soit $n \in \mathbb{N}$,

$w_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1} = \dfrac{3u_n + 2v_n}{5} - \dfrac{u_n + v_n}{2} = \dfrac{6u_n + 4v_n - 5u_n - 5v_n}{10} = \dfrac{u_n - v_n}{10} = \dfrac{w_n}{10}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'égalité $w_{n+1} = \dfrac{1}{10} w_n$ montre que la suite (w_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{10} = 0,1$ et de premier terme $w_0 = u_0 - v_0 = 16 - 5 = 11$.

On sait qu'alors pour tout naturel n, $w_n = 11 \times (0,1)^n$.

b. Comme $0,1 > 0 \Rightarrow 0,1^n > 0$ et $11 > 0$, donc la suite (w_n) est une suite de nombres supérieurs à zéro.

D'autre part $0 < 0,1 < 1$ entraine que $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,1^n = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$.

3. **a.** Pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{3u_n + 2v_n}{5} - u_n = \dfrac{3u_n + 2v_n}{5} - \dfrac{5u_n}{5} = \dfrac{-2u_n + 2v_n}{5} = -\dfrac{2}{5}(u_n - v_n) = -\dfrac{2}{5} w_n = -\dfrac{4}{10} w_n = -0,4 w_n$

b. On a vu à la question 2. b. que $w_n > 0$, quel que soit le naturel n, donc $-0,4 w_n < 0$ et par conséquent :

$u_{n+1} - u_n < 0 \iff u_{n+1} < u_n$, ce qui montre que la suite (u_n) est décroissante.

On peut démontrer de la même manière que la suite (v_n) est croissante. On admet ce résultat, et on remarque qu'on a alors : pour tout entier naturel n, $v_n \geqslant v_0 = 5$.

c. On va démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geqslant 5$.

Initialisation : On a $u_0 = 16 \geqslant 5$: la proposition est vraie au rang $n = 0$.

Hérédité : on suppose que pour $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \geqslant 5$.

On a donc $3u_n \geqslant 15$ (1) et comme on a admis que $v_n \geqslant 5$, on a $2v_n \geqslant 10$ (2).

On peut ajouter membre à membre (1) et (2) pour obtenir :

$3u_n + 2v_n \geqslant 25$ d'où en multipliant par le nombre positif $\dfrac{1}{5}$:

$\dfrac{3u_n+2v_n}{5} \geqslant 5$ et finalement $u_{n+1} \geqslant 5$.

Conclusion : la minoration par 5 est vraie au rang 0 et si elle vraie au tang n, elle l'est aussi au rang $n+1$; d'après le principe de récurrence on a donc quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 5$.

La suite (u_n) est décroissante et minorée par 5 : d'après le théorème de la convergence monotone, elle converge vers une limite $\ell \geqslant 5$.

On peut démontrer de la même manière que la suite (v_n) est convergente. On admet ce résultat, et on appelle ℓ' la limite de (v_n).

4. **a.** On a vu à la question 2.b. que $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$ ou encore que $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$.

Les deux suites (u_n) et (v_n) étant convergentes, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ et donc que $\ell = \ell'$.

b. On considère la suite (c_n) définie pour tout entier naturel n par : $c_n = 5u_n + 4v_n$.

Donc : $c_{n+1} = 5u_{n+1} + 4v_{n+1} = 3u_n + 2v_n + 2(u_n + v_n) = 3u_n + 2v_n + 2u_n + 2v_n$
$= 5u_n + 4v_n = c_n$.

Donc la suite (c_n) est constante.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n = c_0 = 5u_0 + 4v_0 = 5 \times 16 + 4 \times 5 = 80 + 20 = 100$.

c. Puisque $c_n = 5u_n + 4v_n$ et que (u_n) et (v_n) ont même limite ℓ, on a donc :

$\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 100 = 100 = 5\ell + 4\ell = 9\ell$.

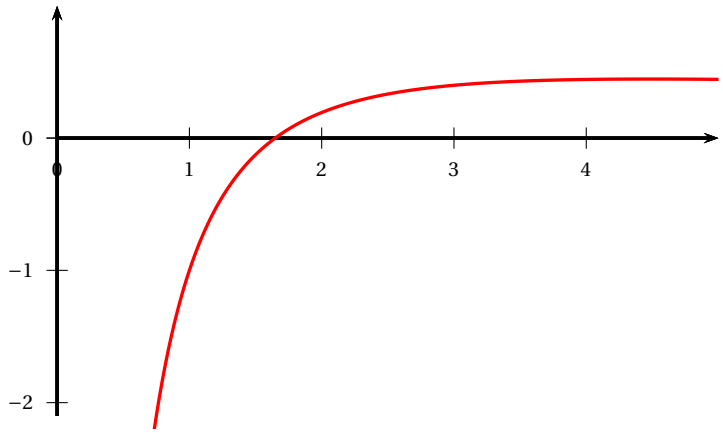
$9\ell = 100$ donc $\ell = \dfrac{100}{9}$.

Exercice B

Principaux domaines abordés :
Fonction logarithme, limites, dérivation.

Partie 1

$$f(x) = \frac{2\ln(x) - 1}{x}.$$



1. Dans $]0\,;\,+\infty[$, $f(x)=0 \iff \dfrac{2\ln(x)-1}{x}=0$, on a donc

$2\ln(x)-1=0 \iff 2\ln(x)=1 \iff \ln(x)=\dfrac{1}{2} \iff x=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$.

$S=\left\{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right\}$.

Rem. $\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\mathrm{e}}\approx 1,649\approx 1,65$ au centième près.

2. • Sur $\left]0\,;\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right[$, on a $f(x)<0$;

• Sur $\left]\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\,;\,+\infty\right[$, on a $f(x)>0$;

• $f\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right)=0$.

Partie II

$$g(x)=[\ln(x)]^2-\ln(x).$$

1. **a.** On a $\lim\limits_{x\to 0}\ln x=-\infty$, d'où $\lim\limits_{x\to 0}(\ln x)^2=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0}(-\ln x)=+\infty$, donc par somme de limites :

$\lim\limits_{x\to 0} g(x)=+\infty$.

b. $g(x)=\ln(x)[\ln(x)-1]$. Comme

$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)-1=+\infty$, on obtient par produit :

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$.

2. La fonction $g(x)=\ln(x)[\ln(x)-1]$ est dérivable comme produit de deux fonctions dérivables sur $]0\,;\,+\infty[$ et sur cet intervalle :

$g'(x)=\dfrac{1}{x}\times[\ln(x)-1]+\ln(x)\times\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{x}[\ln(x)-1+\ln(x)]=\dfrac{1}{x}\times(2\ln(x)-1)=\dfrac{2\ln(x)-1}{x}=f(x)$.

3. Le signe de $f(x)=g'(x)$ a été trouvé à la question 2 de la partie I; on a donc :

• Sur $\left]0\,;\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right[$, on a $g'(x)<0$: la fonction g est strictement décroissante sur cet intervalle

• Sur $\left]\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\,;\,+\infty\right[$, on a $g'(x)>0$: la fonction g est strictement croissante sur cet intervalle

• $g'\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right)=0$: $g\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right)=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{4}$ est le minimum de la fonction g sur $]0\,;\,+\infty[$.

x	0		$\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	$+\infty$	↘	$-\frac{1}{4}$	↗	$+\infty$

4. Comme $-\frac{1}{4}=-0,25$, le tableau de variations montre que l'équation $g(x)=m$, avec $m>-0,25$ a deux solutions, l'une sur l'intervalle $\left]0\,;\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right[$, l'autre sur $\left]\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\,;\,+\infty\right[$.

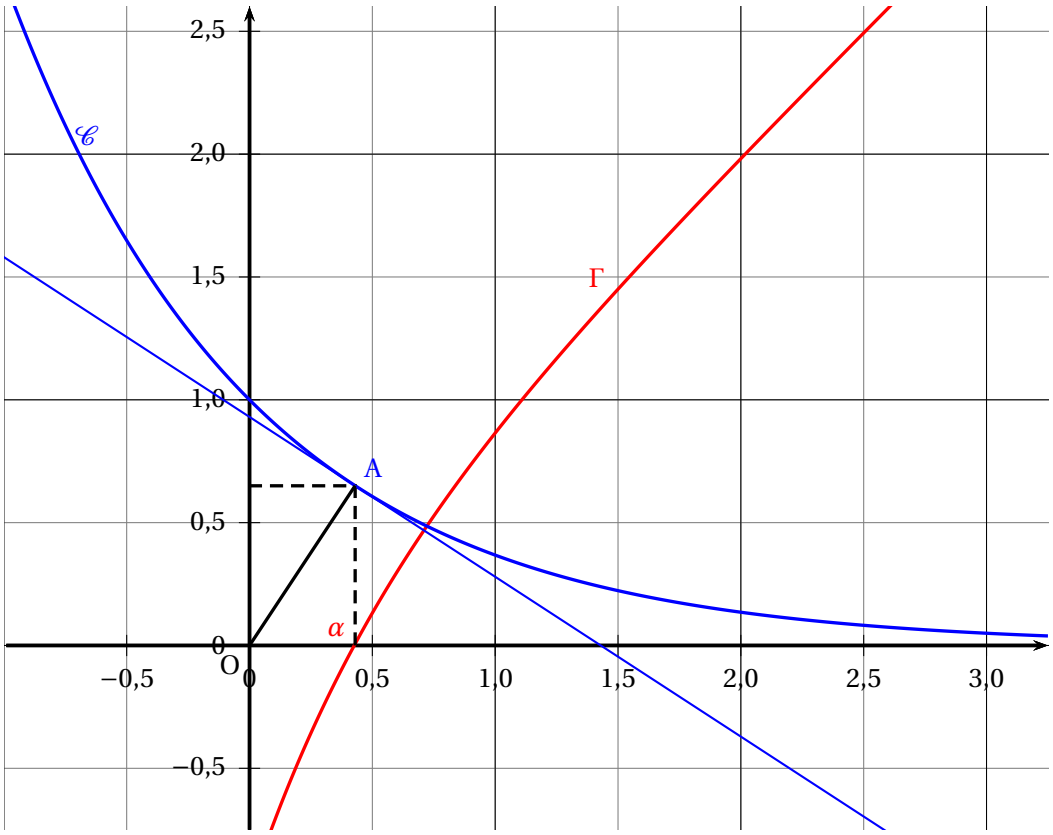
5. Dans $]0\,;\,+\infty[$, $g(x)=0 \iff \ln(x)[\ln(x)-1]=0 \iff \begin{cases} \ln(x) & = & 0 \\ \ln(x)-1 & = & 0 \end{cases} \iff$

$\begin{cases} \ln(x) & = & 0 \\ \ln(x) & = & 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x & = & 1 \\ x & = & \text{e} \end{cases}$

$S = \{1\,;\,\text{e}\}$.

Annexe à compléter et à rendre avec la copie

Exercice 3



Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.